绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若z=1+i，则|z^2–2z|=（　）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】

由题意首先求得 z^2-2z 的值，然后计算其模即可.

【详解】由题意可得：$z^2=(1+i)^2=2i$，则 $z^2-2z=2i-2(1+i)=-2$.

故 $\left|z^2-2z\right|=\left|-2\right|=2$.

故选：D.

【点睛】本题主要考查复数的运算法则和复数的模的求解等知识，属于基础题.

2.设集合A={x|x^2–4≤0}，B={x|2x+a≤0}，且A∩B={x|–2≤x≤1}，则a=（　）

A. –4　　B. –2　　C. 2　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】

由题意首先求得集合A,B，然后结合交集的结果得到关于a的方程，求解方程即可确定实数a的值.

【详解】求解二次不等式$x^2-4\le 0$可得：$A=\{x|-2\le x\le 2\}$，

求解一次不等式$2x+a\le 0$可得：$B=\left\{x|x\le -\dfrac{a}{2}\right\}$.

由于$A\cap B=\{x|-2\le x\le 1\}$，故：$-\dfrac{a}{2}=1$，解得：$a=-2$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查交集的运算，不等式的解法等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

3.埃及胡夫金字塔是古代世界建筑奇迹之一，它的形状可视为一个正四棱锥，以该四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积，则其侧面三角形底边上的高与底面正方形的边长的比值为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】

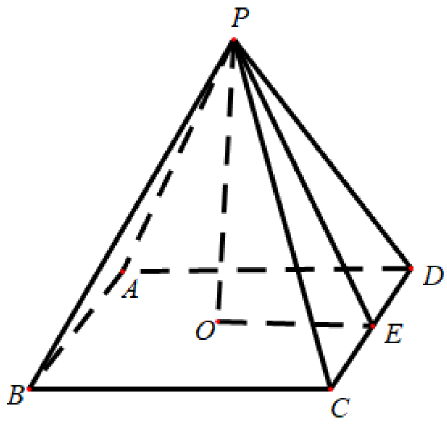
设$CD=a,PE=b$，利用$PO^2=\dfrac{1}{2}CD\cdot PE$得到关于$a,b$的方程，解方程即可得到答案.

【详解】如图，设$CD=a,PE=b$，则$PO=\sqrt{PE^2-OE^2}=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{4}}$，

由题意 $PO^2=\frac{1}{2}ab$，即 $b^2-\frac{a^2}{4}=\frac{1}{2}ab$，化简得 $4(\frac{b}{a})^2-2\cdot\frac{b}{a}-1=0$，

解得 $\frac{b}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$（负值舍去）.

故选：C.



【点睛】本题主要考查正四棱锥的概念及其有关计算，考查学生的数学计算能力，是一道容易题.

4.已知A为抛物线C:y^2=2px（p>0）上一点，点A到C的焦点的距离为12，到y轴的距离为9，则p=（　）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

【答案】C

【解析】

【分析】

利用抛物线的定义建立方程即可得到答案.

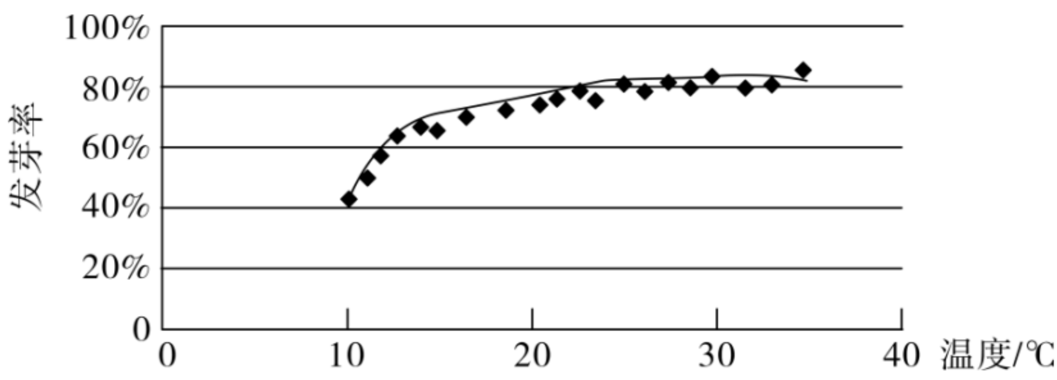
【详解】设抛物线的焦点为F，由抛物线的定义知$|AF|=x_A+\frac{p}{2}=12$，即$12=9+\frac{p}{2}$，解得$p=6$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查利用抛物线的定义计算焦半径，考查学生转化与化归思想，是一道容易题.

5.某校一个课外学习小组为研究某作物种子的发芽率y和温度x（单位：°C）的关系，在20个

不同的温度条件下进行种子发芽实验，由实验数据$(x_i, y_i)(i=1,2,\cdots,20)$得到下面的散点图：



由此散点图，在10°C至40°C之间，下面四个回归方程类型中最适宜作为发芽率y和温度x的回归方程类型的是（　）

A. $y=a+bx$　　　　B. $y=a+bx^2$

C. $y=a+be^x$　　　　D. $y=a+b\ln x$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据散点图的分布可选择合适的函数模型.

【详解】由散点图分布可知，散点图分布在一个对数函数的图象附近，

因此，最适合作为发芽率y和温度x的回归方程类型的是$y=a+b\ln x$.

故选：D.

【点睛】本题考查函数模型的选择，主要观察散点图的分布，属于基础题.

6.函数$f(x)=x^4-2x^3$的图像在点$(1, f(1))$处的切线方程为（　）

A. $y=-2x-1$　　　　B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-3$　　　　D. $y=2x+1$

【答案】B

【解析】

【分析】

求得函数$y=f\left(x\right)$的导数$f'\left(x\right)$，计算出$f\left(1\right)$和$f'\left(1\right)$的值，可得出所求切线的点斜式方

程，化简即可.

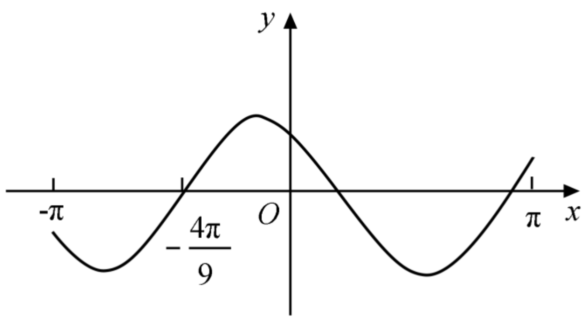
【详解】$\because f\left(x\right)=x^4-2x^3$，$\therefore f'\left(x\right)=4x^3-6x^2$，$\therefore f\left(1\right)=-1$，$f'\left(1\right)=-2$，

因此，所求切线的方程为$y+1=-2\left(x-1\right)$，即$y=-2x+1$.

故选：B.

【点睛】本题考查利用导数求解函数图象的切线方程，考查计算能力，属于基础题

7.设函数$f(x)=\cos(\omega x+\dfrac{\pi}{6})$在$[-\pi,\pi]$的图像大致如下图，则$f(x)$的最小正周期为（　）



A. $\dfrac{10\pi}{9}$

B. $\dfrac{7\pi}{6}$

C. $\dfrac{4\pi}{3}$

D. $\dfrac{3\pi}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】

由图可得：函数图象过点$\left(-\dfrac{4\pi}{9},0\right)$，即可得到$\cos\left(-\dfrac{4\pi}{9}\cdot\omega+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，结合$\left(-\dfrac{4\pi}{9},0\right)$是函数$f\left(x\right)$图象与$x$轴负半轴的第一个交点即可得到$-\dfrac{4\pi}{9}\cdot\omega+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}$，即可求得$\omega=\dfrac{3}{2}$，再利用三角函数周期公式即可得解.

【详解】由图可得：函数图象过点$\left(-\dfrac{4\pi}{9},0\right)$，

将它代入函数$f\left(x\right)$可得：$\cos\left(-\dfrac{4\pi}{9}\cdot\omega+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

又$\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$是函数$f\left(x\right)$图象与$x$轴负半轴的第一个交点，

所以$-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，解得：$\omega=\frac{3}{2}$

所以函数$f\left(x\right)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$

故选：C

【点睛】本题主要考查了三角函数的性质及转化能力，还考查了三角函数周期公式，属于中档题.

8. $(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$的展开式中x^3y^3的系数为（　）

A. 5　　　　B. 10

C. 15　　　　D. 20

【答案】C

【解析】

【分析】

求得$(x+y)^5$展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}y^r$（$r\in N$且$r\le 5$），即可求得$\left(x+\frac{y^2}{x}\right)$与$(x+y)^5$展开式的乘积为$C_5^r x^{6-r}y^r$或$C_5^r x^{4-r}y^{r+2}$形式，对$r$分别赋值为3，1即可求得$x^3y^3$的系数，问题得解.

【详解】$(x+y)^5$展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}y^r$（$r\in N$且$r\le 5$）

所以$\left(x+\frac{y^2}{x}\right)$与$(x+y)^5$展开式的乘积可表示为：

$xT_{r+1}=xC_5^r x^{5-r}y^r=C_5^r x^{6-r}y^r$或$\frac{y^2}{x}T_{r+1}=\frac{y^2}{x}C_5^r x^{5-r}y^r=C_5^r x^{4-r}y^{r+2}$

在$xT_{r+1}=C_5^r x^{6-r}y^r$中，令$r=3$，可得：$xT_4=C_5^3x^3y^3$，该项中$x^3y^3$的系数为$10$，

在$\frac{y^2}{x}T_{r+1}=C_5^r x^{4-r}y^{r+2}$中，令$r=1$，可得：$\frac{y^2}{x}T_2=C_5^1x^3y^3$，该项中$x^3y^3$的系数为$5$

所以 x^3y^3 的系数为 $10+5=15$

故选：C

【点睛】本题主要考查了二项式定理及其展开式的通项公式，还考查了赋值法、转化能力及分析能力，属于中档题.

9.已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $3\cos2\alpha-8\cos\alpha=5$，则 $\sin\alpha=$（　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

B. $\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{1}{3}$

D. $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$

【答案】A

【解析】

【分析】

用二倍角的余弦公式，将已知方程转化为关于 $\cos\alpha$ 的一元二次方程，求解得出 $\cos\alpha$，再用同角间的三角函数关系，即可得出结论.

【详解】$3\cos2\alpha-8\cos\alpha=5$，得 $6\cos^2\alpha-8\cos\alpha-8=0$，

即 $3\cos^2\alpha-4\cos\alpha-4=0$，解得 $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$ 或 $\cos\alpha=2$（舍去），

又 $\because\alpha\in(0,\pi),\therefore\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

故选：A.

【点睛】本题考查三角恒等变换和同角间的三角函数关系求值，熟记公式是解题的关键，考查计算求解能力，属于基础题.

10.已知 A,B,C 为球 O 的球面上的三个点，$\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，若 $\odot O_1$ 的面积为 4π，$AB=BC=AC=OO_1$，则球 O 的表面积为（　）

A. 64π

B. 48π

C. 36π

D. 32π

【答案】A

【解析】

【分析】

由已知可得等边$\triangle ABC$的外接圆半径，进而求出其边长，得出OO_1的值，根据球截面性质，求出球的半径，即可得出结论.

【详解】设圆O_1半径为r，球的半径为R，依题意，

得$\pi r^2 = 4\pi, \therefore r = 2$，

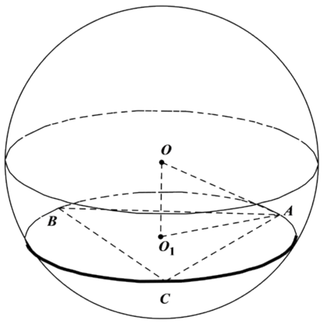
由正弦定理可得$AB = 2r\sin 60° = 2\sqrt{3}$，

$\therefore OO_1 = AB = 2\sqrt{3}$，根据圆截面性质$OO_1 \perp$平面$ABC$，

$\therefore OO_1 \perp O_1A, R = OA = \sqrt{OO_1^2 + O_1A^2} = \sqrt{OO_1^2 + r^2} = 4$，

$\therefore$球O的表面积$S = 4\pi R^2 = 64\pi$.

故选：A



【点睛】本题考查球的表面积，应用球的截面性质是解题的关键，考查计算求解能力，属于基础题.

11.已知⊙M：$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$，直线$l$：$2x + y + 2 = 0$，$P$为$l$上的动点，过点$P$作⊙$M$的切线$PA, PB$，切点为$A, B$，当$|PM| \cdot |AB|$最小时，直线$AB$的方程为（　）

A. $2x - y - 1 = 0$　　B. $2x + y - 1 = 0$　　C. $2x - y + 1 = 0$　　D. $2x + y + 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】

由题意可判断直线与圆相离，根据圆的知识可知，四点A, P, B, M共圆，且$AB \perp MP$，根

据$|PM|\cdot|AB|=2S_{\triangle PAM}=2|PA|$可知，当直线$MP\perp l$时，$|PM|\cdot|AB|$最小，求出以$MP$为直径的圆的方程，根据圆系的知识即可求出直线$AB$的方程.

【详解】圆的方程可化为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$，点M到直线l的距离为

$d=\dfrac{|2\times1+1+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}>2$，所以直线$l$与圆相离.

依圆的知识可知，四点A,P,B,M四点共圆，且$AB\perp MP$，所以

$|PM|\cdot|AB|=2S_{\triangle PAM}=2\times\dfrac{1}{2}\times|PA|\times|AM|=2|PA|$，而$|PA|=\sqrt{|MP|^2-4}$，

当直线$MP\perp l$时，$|MP|_{\min}=\sqrt{5}$，$|PA|_{\min}=1$，此时$|PM|\cdot|AB|$最小.

$\therefore MP:y-1=\dfrac{1}{2}(x-1)$即$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$，由$\begin{cases}y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\\2x+y+2=0\end{cases}$解得，$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$.

所以以MP为直径的圆的方程为$(x-1)(x+1)+y(y-1)=0$，即$x^2+y^2-y-1=0$，

两圆的方程相减可得：$2x+y+1=0$，即为直线AB的方程.

故选：D.

【点睛】本题主要考查直线与圆，圆与圆的位置关系的应用，以及圆的几何性质的应用，意在考查学生的转化能力和数学运算能力，属于中档题.

12.若$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则（   ）

A. $a>2b$　　B. $a<2b$　　C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

【答案】B

【解析】

【分析】

设$f(x)=2^x+\log_2 x$，利用作差法结合$f(x)$的单调性即可得到答案.

【详解】设$f(x)=2^x+\log_2 x$，则$f(x)$为增函数，因为

$2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b=2^{2b}+\log_2 b$

所以$f(a)-f(2b)=2^a+\log_2 a-(2^{2b}+\log_2 2b)=2^{2b}+\log_2 b-(2^{2b}+\log_2 2b)$

$=\log_2\frac{1}{2}=-1<0$，

所以 $f(a)<f(2b)$，所以 $a<2b$.

$f(a)-f(b^2)=2^a+\log_2 a-(2^{b^2}+\log_2 b^2)=2^{2b}+\log_2 b-(2^{b^2}+\log_2 b^2)=$

$2^{2b}-2^{b^2}-\log_2 b$，

当 $b=1$ 时，$f(a)-f(b^2)=2>0$，此时 $f(a)>f(b^2)$，有 $a>b^2$

当 $b=2$ 时，$f(a)-f(b^2)=-1<0$，此时 $f(a)<f(b^2)$，有 $a<b^2$，所以C、D错误.

故选：B.

【点睛】本题主要考查函数与方程的综合应用，涉及到构造函数，利用函数的单调性比较大小，是一道中档题.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.若x，y满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\le 0,\\ x-y-1\ge 0,\\ y+1\ge 0,\end{cases}$ 则$z=x+7y$的最大值为______________.

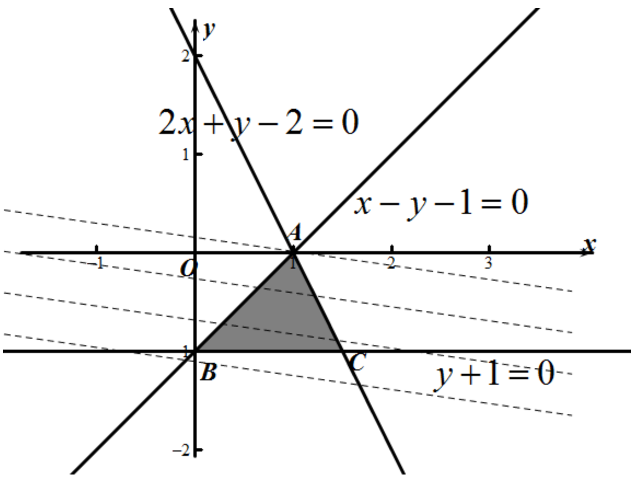
【答案】1

【解析】

【分析】

首先画出可行域，然后结合目标函数的几何意义即可求得其最大值.

【详解】绘制不等式组表示的平面区域如图所示，



目标函数 $z=x+7y$ 即：$y=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}z$，

其中z取得最大值时，其几何意义表示直线系在y轴上的截距最大，

据此结合目标函数的几何意义可知目标函数在点A处取得最大值，

联立直线方程：$\begin{cases}2x+y-2=0\\ x-y-1=0\end{cases}$，可得点$A$的坐标为：$A(1,0)$，

据此可知目标函数的最大值为：$z_{\max}=1+7\times 0=1$.

故答案为：1.

【点睛】求线性目标函数$z=ax+by(ab\neq 0)$的最值，当$b>0$时，直线过可行域且在y轴上截距最大时，z值最大，在y轴截距最小时，z值最小；当$b<0$时，直线过可行域且在y轴上截距最大时，z值最小，在y轴上截距最小时，z值最大.

14.设a,b为单位向量，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$，则$|a-b|=$______________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

整理已知可得：$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}$，再利用$\vec{a},\vec{b}$为单位向量即可求得$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，对$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$变形可得：$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2}$，问题得解.

【详解】因为$\vec{a},\vec{b}$为单位向量，所以$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$

所以$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2}=\sqrt{2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=1$

解得：$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

所以$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2}=\sqrt{3}$

故答案为：$\sqrt{3}$

【点睛】本题主要考查了向量模的计算公式及转化能力，属于中档题.

15.已知F为双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，$A$为$C$的右顶点，$B$为$C$上的点，且$BF$垂直于$x$轴.若$AB$的斜率为3，则$C$的离心率为______________.

【答案】2

【解析】

【分析】

根据双曲线的几何性质可知，$|BF|=\frac{b^2}{a}$，$|AF|=c-a$，即可根据斜率列出等式求解即可.

【详解】依题可得，$\frac{|BF|}{|AF|}=3$，而$|BF|=\frac{b^2}{a}$，$|AF|=c-a$，即$\frac{\frac{b^2}{a}}{c-a}=3$，变形得

$c^2-a^2=3ac-3a^2$，化简可得，$e^2-3e+2=0$，解得$e=2$或$e=1$（舍去）.

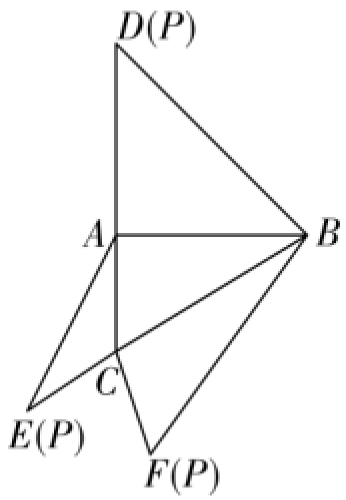
故答案为：2.

【点睛】本题主要考查双曲线的离心率的求法，以及双曲线的几何性质的应用，属于基础题

.

16.如图，在三棱锥$P-$

ABC的平面展开图中，$AC=1$，$AB=AD=\sqrt{3}$，$AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$\angle CAE=30°$，则$\cos\angle FCB=$____________.



【答案】$-\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】

在$\triangle ACE$中，利用余弦定理可求得CE，可得出CF，利用勾股定理计算出BC、BD，可得出BF，然后在$\triangle BCF$中利用余弦定理可求得$\cos\angle FCB$的值.

【详解】$\because AB\perp AC$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，

由勾股定理得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2$，

同理得 $BD=\sqrt{6}$，$\therefore BF=BD=\sqrt{6}$，

在$\triangle ACE$中，$AC=1$，$AE=AD=\sqrt{3}$，$\angle CAE=30^{\circ}$，

由余弦定理得 $CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cos 30^{\circ}=1+3-2\times 1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$，

$\therefore CF=CE=1$，

在$\triangle BCF$中，$BC=2$，$BF=\sqrt{6}$，$CF=1$，

由余弦定理得 $\cos\angle FCB=\frac{CF^2+BC^2-BF^2}{2CF\cdot BC}=\frac{1+4-6}{2\times 1\times 2}=-\frac{1}{4}$.

故答案为：$-\frac{1}{4}$.

【点睛】本题考查利用余弦定理解三角形，考查计算能力，属于中等题.

三、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共60分.

17.设$\{a_n\}$是公比不为1的等比数列，a_1为a_2，a_3的等差中项.

（1）求$\{a_n\}$的公比；

（2）若$a_1=1$，求数列$\{na_n\}$的前n项和.

【答案】（1）-2；（2）$S_n=\frac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}$.

【解析】

【分析】

（1）由已知结合等差中项关系，建立公比q的方程，求解即可得出结论；

（2）由（1）结合条件得出$\{a_n\}$的通项，根据$\{na_n\}$的通项公式特征，用错位相减法，即可求出结论.

【详解】（1）设$\{a_n\}$的公比为q，a_1为a_2,a_3的等差中项，

$\because 2a_1=a_2+a_3, a_1\neq 0, \therefore q^2+q-2=0$，

$\because q \neq 1, \therefore q=-2$；

（2）设$\{na_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1, a_n=(-2)^{n-1}$，

$S_n=1\times1+2\times(-2)+3\times(-2)^2+\cdots+n(-2)^{n-1}$，①

$-2S_n=1\times(-2)+2\times(-2)^2+3\times(-2)^3+\cdots(n-1)(-2)^{n-1}+n(-2)^n$，②

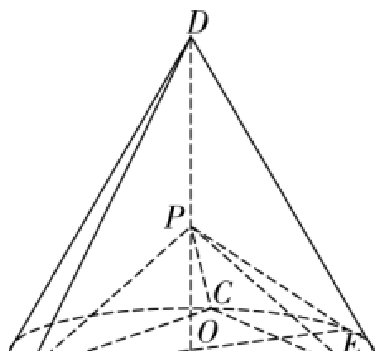
①−②得，$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n(-2)^n$

$=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}-n(-2)^n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{3}$，

$\therefore S_n=\dfrac{1-(1+3n)(-2)^n}{9}$.

【点睛】本题考查等比数列通项公式基本量的计算、等差中项的性质，以及错位相减法求和，考查计算求解能力，属于基础题.

18.如图，D为圆锥的顶点，O是圆锥底面的圆心，AE为底面直径，$AE=AD$．$\triangle ABC$是底面的内接正三角形，P为DO上一点，$PO=\dfrac{\sqrt{6}}{6}DO$.



（1）证明：$PA\perp$平面PBC；

（2）求二面角$B-PC-E$的余弦值.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【分析】

（1）要证明$PA\perp$平面PBC，只需证明$PA\perp PB$，$PA\perp PC$即可；

（2）以O为坐标原点，OA为x轴，ON为y轴建立如图所示的空间直角坐标系，分别算出平面

PCB 的法向量为$\vec{n}$，平面 PCE 的法向量为$\overrightarrow{m}$，利用公式$\cos<\overrightarrow{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{m}}{|\vec{n}||\overrightarrow{m}|}$计算即可得到答案.

【详解】（1）由题设，知$\triangle DAE$为等边三角形，设$AE=1$，

则$DO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$CO=BO=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{1}{2}$，所以$PO=\dfrac{\sqrt{6}}{6}DO=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

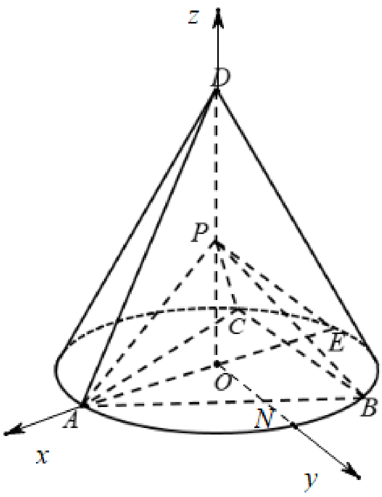
$PC=\sqrt{PO^2+OC^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4},PB=\sqrt{PO^2+OB^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4},$

又$\triangle ABC$为等边三角形，则$\dfrac{BA}{\sin 60^\circ}=2OA$，所以$BA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$PA^2+PB^2=\dfrac{3}{4}=AB^2$，则$\angle APB=90^\circ$，所以$PA\perp PB$，

同理$PA\perp PC$，又$PC\bigcap PB=P$，所以$PA\perp$平面PBC；

（2）过O作$ON\parallel BC$交AB于点N，因为$PO\perp$平面ABC，以O为坐标原点，OA为x轴，ON为y轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则$E(-\dfrac{1}{2},0,0),P(0,0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}),B(-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4},0),C(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{\sqrt{3}}{4},0)$，

$\overrightarrow{PC}=(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{\sqrt{3}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4})$，$\overrightarrow{PB}=(-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4})$，$\overrightarrow{PE}=(-\dfrac{1}{2},0,-\dfrac{\sqrt{2}}{4})$，

设平面PCB的一个法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-x_1-\sqrt{3}y_1-\sqrt{2}z_1=0\\ -x_1+\sqrt{3}y_1-\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，令$x_1=\sqrt{2}$，得$z_1=-1,y_1=0$，

所以$\vec{n}=(\sqrt{2},0,-1)$，

设平面PCE的一个法向量为$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PE}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-x_2-\sqrt{3}y_2-\sqrt{2}z_2=0\\ -2x_2-\sqrt{2}z_2=0\end{cases}$，令$x_2=1$，得$z_2=-\sqrt{2},y_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$\vec{m}=(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\sqrt{2})$

故$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

设二面角$B-PC-E$的大小为θ，则$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】本题主要考查线面垂直的证明以及利用向量求二面角的大小，考查学生空间想象能力，数学运算能力，是一道容易题.

19.甲、乙、丙三位同学进行羽毛球比赛，约定赛制如下：累计负两场者被淘汰；比赛前抽签决定首先比赛的两人，另一人轮空；每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛，负者下一场轮空，直至有一人被淘汰；当一人被淘汰后，剩余的两人继续比赛，直至其中一人被淘汰，另一人最终获胜，比赛结束.经抽签，甲、乙首先比赛，丙轮空.设每场比赛双方获胜的概率都为$\dfrac{1}{2}$，

（1）求甲连胜四场的概率；

（2）求需要进行第五场比赛的概率；

（3）求丙最终获胜的概率.

【答案】（1）$\dfrac{1}{16}$；（2）$\dfrac{3}{4}$；（3）$\dfrac{7}{16}$.

【解析】

【分析】

（1）根据独立事件的概率乘法公式可求得事件“甲连胜四场”的概率；

（2）计算出四局以内结束比赛的概率，然后利用对立事件的概率公式可求得所求事件的概

率；

（3）列举出甲赢的基本事件，结合独立事件的概率乘法公式计算出甲赢的概率，由对称性可知乙赢的概率和甲赢的概率相等，再利用对立事件的概率可求得丙赢的概率.

【详解】（1）记事件M：甲连胜四场，则$P\left(M\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{16}$；

（2）记事件A为甲输，事件B为乙输，事件C为丙输，

则四局内结束比赛的概率为

$$P'=P\left(ABAB\right)+P\left(ACAC\right)+P\left(BCBC\right)+P\left(BABA\right)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{1}{4},$$

所以，需要进行第五场比赛的概率为$P=1-P'=\frac{3}{4}$；

（3）记事件A为甲输，事件B为乙输，事件C为丙输，

记事件M：甲赢，记事件N：丙赢，

则甲赢的基本事件包括：$BCBC$、$ABCBC$、$ACBCB$、

$BABCC$、$BACBC$、$BCACB$、$BCABC$、$BCBAC$，

所以，甲赢的概率为$P\left(M\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+7\times\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{9}{32}$.

由对称性可知，乙赢的概率和甲赢的概率相等，

所以丙赢的概率为$P\left(N\right)=1-2\times\frac{9}{32}=\frac{7}{16}$.

【点睛】本题考查独立事件概率的计算，解答的关键就是列举出符合条件的基本事件，考查计算能力，属于中等题.

20.已知A、B分别为椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的左、右顶点，G为E的上顶点，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=8$，$P$为直线$x=6$上的动点，$PA$与$E$的另一交点为$C$，$PB$与$E$的另一交点为$D$.

（1）求E的方程；

（2）证明：直线CD过定点.

【答案】（1）$\frac{x^2}{9}+y^2=1$；（2）证明详见解析.

【解析】

【分析】

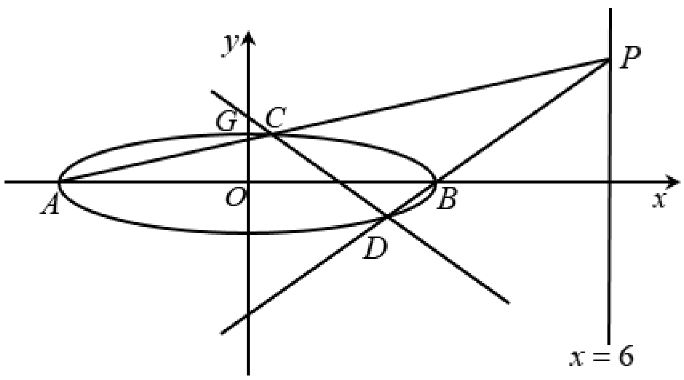
（1）由已知可得：$A(-a,0)$，

$B(a,0)$，$G(0,1)$，即可求得 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1$，结合已知即可求得：$a^2=9$，问题得解.

（2）设 $P(6,y_0)$，可得直线 AP 的方程为：$y=\dfrac{y_0}{9}(x+3)$，联立直线 AP 的方程与椭圆方程即可求得点 C 的坐标为 $\left(\dfrac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9},\dfrac{6y_0}{y_0^2+9}\right)$，同理可得点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{3y_0^2-3}{y_0^2+1},\dfrac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)$，即可表示出直线 CD 的方程，整理直线 CD 的方程可得：

$y=\dfrac{4y_0}{3(3-y_0^2)}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$，命题得证.

【详解】（1）依据题意作出如下图象：



由椭圆方程 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 可得：$A(-a,0)$，　$B(a,0)$，$G(0,1)$

$\therefore\ \overrightarrow{AG}=(a,1)$，$\overrightarrow{GB}=(a,-1)$

$\therefore\ \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}=a^2-1=8$，$\therefore\ a^2=9$

$\therefore$ 椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$

（2）证明：设 $P(6,y_0)$，

则直线 AP 的方程为：$y=\frac{y_0-0}{6-(-3)}(x+3)$，即：$y=\frac{y_0}{9}(x+3)$

联立直线 AP 的方程与椭圆方程可得：$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+y^2=1\\ y=\frac{y_0}{9}(x+3)\end{cases}$，整理得：

$(y_0^2+9)x^2+6y_0^2x+9y_0^2-81=0$，解得：$x=-3$ 或 $x=\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}$

将 $x=\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}$ 代入直线 $y=\frac{y_0}{9}(x+3)$ 可得：$y=\frac{6y_0}{y_0^2+9}$

所以点 C 的坐标为 $\left(\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9},\frac{6y_0}{y_0^2+9}\right)$.

同理可得：点 D 的坐标为 $\left(\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1},\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)$

$\therefore$ 直线 CD 的方程为：$y-\left(\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)=\frac{\frac{6y_0}{y_0^2+9}-\left(\frac{-2y_0}{y_0^2+1}\right)}{\frac{-3y_0^2+27}{y_0^2+9}-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}}\left(x-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)$，

整理可得：$y+\frac{2y_0}{y_0^2+1}=\frac{8y_0(y_0^2+3)}{6(9-y_0^4)}\left(x-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)=\frac{8y_0}{6(3-y_0^2)}\left(x-\frac{3y_0^2-3}{y_0^2+1}\right)$

整理得：$y=\frac{4y_0}{3(3-y_0^2)}x+\frac{2y_0}{y_0^2-3}=\frac{4y_0}{3(3-y_0^2)}\left(x-\frac{3}{2}\right)$

故直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$

【点睛】本题主要考查了椭圆的简单性质及方程思想，还考查了计算能力及转化思想、推理论证能力，属于难题.

21.已知函数 $f(x)=e^x+ax^2-x$.

（1）当a=1时，讨论f（x）的单调性；

（2）当x≥0时，f（x）≥$\frac{1}{2}x^3+1$，求a的取值范围.

【答案】（1）当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，

$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增.（2）$\left[\frac{7-e^2}{4},+\infty\right)$

【解析】

【分析】

(1)由题意首先对函数二次求导，然后确定导函数的符号，最后确定原函数的单调性即可.

(2)首先讨论x=0的情况，然后分离参数，构造新函数，结合导函数研究构造所得的函数的最大值即可确定实数a的取值范围.

【详解】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x+x^2-x$，$f'(x)=e^x+2x-1$，

由于 $f''(x)=e^x+2>0$，故 $f'(x)$ 单调递增，注意到 $f'(0)=0$，故：

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增.

(2)由 $f(x)\geq\frac{1}{2}x^3+1$ 得，$e^x+ax^2-x\ldots\frac{1}{2}x^3+1$，其中 $x\geq0$，

①.当x=0时，不等式为：$1\geq1$，显然成立，符合题意；

②.当 $x>0$ 时，分离参数a得，$a\ldots-\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$，

记 $g(x)=-\dfrac{e^x-\frac{1}{2}x^3-x-1}{x^2}$，$g'(x)=-\dfrac{(x-2)\left(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)}{x^3}$，

令 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1(x\geq0)$，

则 $h'(x)=e^x-x-1$，$h''(x)=e^x-1\geq0$，

故 $h'(x)$ 单调递增，$h'(x)\geq h'(0)=0$，

故函数 $h(x)$ 单调递增，$h(x)\geq h(0)=0$，

由 $h(x)\geq0$ 可得：$e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\ldots0$ 恒成立，

故当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

因此，$\left[g(x)\right]_{\max}=g(2)=\dfrac{7-e^2}{4}$，

综上可得，实数a的取值范围是$\left[\dfrac{7-e^2}{4},+\infty\right)$.

【点睛】导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：

(1)考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系.

(2)利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数.

(3)利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题. (4)考查数形结合思想的应用.

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

[选修4—4：坐标系与参数方程]

22.在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\cos^k t,\\ y=\sin^k t\end{cases}$ (t为参数)．以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的极坐标方程为$4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$.

（1）当$k=1$时，C_1是什么曲线?

（2）当$k=4$时，求C_1与C_2的公共点的直角坐标.

【答案】（1）曲线C_1表示以坐标原点为圆心，半径为1的圆；（2）$(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

【解析】

【分析】

（1）利用$\sin^2 t+\cos^2 t=1$消去参数t，求出曲线C_1的普通方程，即可得出结论；

（2）当$k=4$时，$x\ge 0,y\ge 0$，曲线C_1的参数方程化为$\begin{cases}\sqrt{x}=\cos^2 t\\ \sqrt{y}=\sin^2 t\end{cases}$($t$为参数)，两式相加消去参数$t$，得$C_1$普通方程，由$\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$，将曲线$C_2$化为直角坐标方程，联立$C_1,C_2$方程，即可求解.

【详解】（1）当$k=1$时，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$($t$为参数)，

两式平方相加得 $x^2+y^2=1$，

所以曲线 C_1 表示以坐标原点为圆心，半径为1的圆；

（2）当 $k=4$ 时，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^4 t\\ y=\sin^4 t\end{cases}$ (t 为参数)，

所以 $x\ge 0, y\ge 0$，曲线 C_1 的参数方程化为 $\begin{cases}\sqrt{x}=\cos^2 t\\ \sqrt{y}=\sin^2 t\end{cases}$ (t 为参数)，

两式相加得曲线 C_1 方程为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，

得 $\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$，平方得 $y=x-2\sqrt{x}+1, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，

曲线 C_2 的极坐标方程为 $4\rho\cos\theta-16\rho\sin\theta+3=0$，

曲线 C_2 直角坐标方程为 $4x-16y+3=0$，

联立 C_1, C_2 方程 $\begin{cases}y=x-2\sqrt{x}+1\\ 4x-16y+3=0\end{cases}$，

整理得 $12x-32\sqrt{x}+13=0$，解得 $\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sqrt{x}=\dfrac{13}{6}$（舍去），

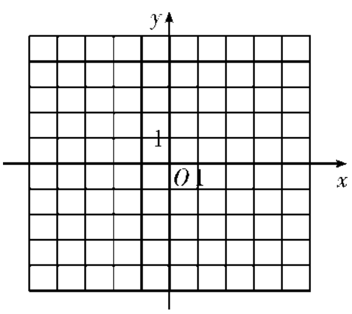
$\therefore x=\dfrac{1}{4}, y=\dfrac{1}{4}$，$\therefore C_1, C_2$ 公共点的直角坐标为 $(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$.

【点睛】本题考查参数方程与普通方程互化，极坐标方程与直角坐标方程互化，合理消元是解题的关系，要注意曲线坐标的范围，考查计算求解能力，属于中档题.

[选修4—5：不等式选讲]

23.已知函数 $f(x)=|3x+1|-2|x-1|$.

（1）画出 $y=f(x)$ 的图像；



（2）求不等式 $f(x)>f(x+1)$ 的解集.

【答案】（1）详解解析；（2）$\left(-\infty,-\frac{7}{6}\right)$.

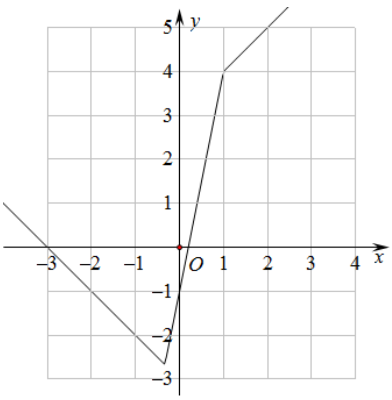
【解析】

【分析】

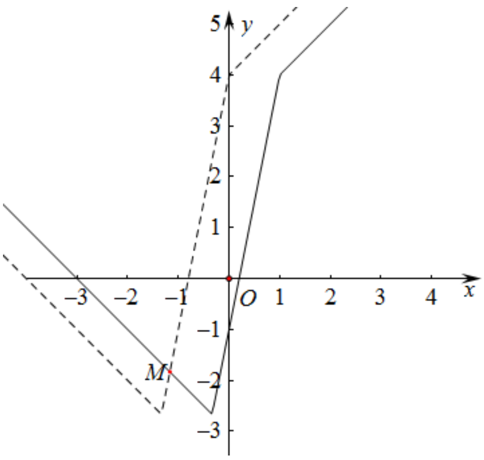
（1）根据分段讨论法，即可写出函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，作出图象；

（2）作出函数 $f\left(x+1\right)$ 的图象，根据图象即可解出.

【详解】（1）因为 $f\left(x\right)=\begin{cases} x+3, & x\geq 1 \\ 5x-1, & -\frac{1}{3}<x<1 \\ -x-3, & x\leq -\frac{1}{3} \end{cases}$，作出图象，如图所示：



（2）将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移1个单位，可得函数 $f\left(x+1\right)$ 的图象，如图所示：



由 $-x-3=5\left(x+1\right)-1$，解得 $x=-\frac{7}{6}$.

所以不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{7}{6}\right)$.

【点睛】本题主要考查画分段函数的图象，以及利用图象解不等式，意在考查学生的数形结合能力，属于基础题．