绝密☆启用前　试卷类型：A

2022 年普通高等学校招生全国统一考试

数学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4．考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x\,|\,\sqrt{x}<4\}$， $N=\{x\,|\,3x\geq 1\}$，则 $M\bigcap N=$（　　）

A. $\left\{x\middle|0\leq x<2\right\}$　　　B. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leq x<2\right\}$　　　C. $\left\{x\middle|3\leq x<16\right\}$　　　D. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leq x<16\right\}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出集合 M,N 后可求 $M\cap N$.

【详解】$M=\{x\,|\,0\leq x<16\},N=\{x\,|\,x\geq\frac{1}{3}\}$，故 $M\bigcap N=\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leq x<16\right\}$，

故选：D

2. 若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\bar{z}=$（　　）

A. -2　　　B. -1　　　C. 1　　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用复数的除法可求 z，从而可求 $z+\bar{z}$.

【详解】由题设有 $1-z=\frac{1}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}$，故 $z=1+\mathrm{i}$，故 $z+\bar{z}=(1+\mathrm{i})+(1-\mathrm{i})=2$，

故选：D

3. 在$\triangle ABC$中，点D在边AB上，$BD=2DA$．记$\overrightarrow{CA}=\vec{m},\overrightarrow{CD}=\vec{n}$，则$\overrightarrow{CB}=$（　　）

A. $3\vec{m}-2\vec{n}$　　　　B. $-2\vec{m}+3\vec{n}$　　　　C. $3\vec{m}+2\vec{n}$　　　　D. $2\vec{m}+3\vec{n}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据几何条件以及平面向量的线性运算即可解出．

【详解】因为点D在边AB上，$BD=2DA$，所以$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$，即

$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}\right)$，

所以$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\vec{n}-2\vec{m}=-2\vec{m}+3\vec{n}$．

故选：B．

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔$148.5\mathrm{m}$时，相应水面的面积为$140.0\mathrm{km}^2$；水位为海拔$157.5\mathrm{m}$时，相应水面的面积为$180.0\mathrm{km}^2$，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔$148.5\mathrm{m}$上升到$157.5\mathrm{m}$时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（　　）

A. $1.0\times 10^9\mathrm{m}^3$　　　　B. $1.2\times 10^9\mathrm{m}^3$　　　　C. $1.4\times 10^9\mathrm{m}^3$　　　　D. $1.6\times 10^9\mathrm{m}^3$

【答案】C

【解析】

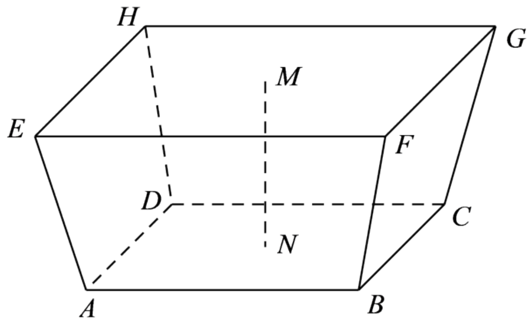
【分析】根据题意只要求出棱台的高，即可利用棱台的体积公式求出．

【详解】依题意可知棱台的高为$MN=157.5-148.5=9$(m)，所以增加的水量即为棱台的体积V．

棱台上底面积$S=140.0\mathbf{km}^2=140\times 10^6\mathbf{m}^2$，下底面积$S'=180.0\mathbf{km}^2=180\times 10^6\mathbf{m}^2$，

$$\therefore V=\frac{1}{3}h\left(S+S'+\sqrt{SS'}\right)=\frac{1}{3}\times 9\times\left(140\times 10^6+180\times 10^6+\sqrt{140\times 180\times 10^{12}}\right)$$

$$=3\times\left(320+60\sqrt{7}\right)\times 10^6\approx\left(96+18\times 2.65\right)\times 10^7=1.437\times 10^9\approx 1.4\times 10^9(\mathrm{m}^3).$$



故选：C．

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】由古典概型概率公式结合组合、列举法即可得解.

【详解】从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，共有 $C_7^2=21$ 种不同的取法，

若两数不互质，不同的取法有：$(2,4),(2,6),(2,8),(3,6),(4,6),(4,8),(6,8)$，共 7 种，

故所求概率 $P=\frac{21-7}{21}=\frac{2}{3}$.

故选：D.

6. 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T. 若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】由三角函数的图象与性质可求得参数，进而可得函数解析式，代入即可得解.

【详解】由函数的最小正周期 T 满足 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，得 $\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$，解得 $2<\omega<3$，

又因为函数图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 对称，所以 $\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in Z$，且 $b=2$，

所以 $\omega=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}k,k\in Z$，所以 $\omega=\frac{5}{2}$，$f(x)=\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+2=1$.

故选：A

7. 设 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1}, b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

【答案】C

【解析】

【分析】构造函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$， 导数判断其单调性，由此确定 a,b,c 的大小.

【详解】设 $f(x)=\ln(1+x)-x(x>-1)$，因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增，

所以 $f(\frac{1}{9})<f(0)=0$，所以 $\ln\frac{10}{9}-\frac{1}{9}<0$，故 $\frac{1}{9}>\ln\frac{10}{9}=-\ln 0.9$，即 $b>c$，

所以 $f(-\frac{1}{10})<f(0)=0$，所以 $\ln\frac{9}{10}+\frac{1}{10}<0$，故 $\frac{9}{10}<\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}$，所以 $\frac{1}{10}\mathrm{e}^{\frac{1}{10}}<\frac{1}{9}$，

故 $a<b$，

设 $g(x)=x\mathrm{e}^{x}+\ln(1-x)(0<x<1)$，则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{(x^{2}-1)\mathrm{e}^{x}+1}{x-1}$，

令 $h(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}-1)+1$，$h'(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}+2x-1)$，

当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}-1)+1$ 单调递减，

当 $\sqrt{2}-1<x<1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)=\mathrm{e}^{x}(x^{2}-1)+1$ 单调递增，

又 $h(0)=0$，

所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$h(x)<0$，

所以当 $0<x<\sqrt{2}-1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)=x\mathrm{e}^{x}+\ln(1-x)$ 单调递增，

所以 $g(0.1)>g(0)=0$，即 $0.1\mathrm{e}^{0.1}>-\ln 0.9$，所以 $a>c$

故选：C.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D.

$[18,27]$

【答案】C

【解析】

【分析】设正四棱锥的高为h，由球的截面性质列方程求出正四棱锥的底面边长与高的关系，由此确定正四棱锥体积的取值范围.

【详解】$\because$ 球的体积为36π，所以球的半径$R=3$，

设正四棱锥的底面边长为$2a$，高为h，

则$l^2=2a^2+h^2$，$3^2=2a^2+(3-h)^2$，

所以$6h=l^2$，$2a^2=l^2-h^2$

所以正四棱锥的体积$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times 4a^2\times h=\frac{2}{3}\times(l^2-\frac{l^4}{36})\times\frac{l^2}{6}=\frac{1}{9}\left(l^4-\frac{l^6}{36}\right)$，

所以$V'=\frac{1}{9}\left(4l^3-\frac{l^5}{6}\right)=\frac{1}{9}l^3\left(\frac{24-l^2}{6}\right)$，

当$3\le l\le 2\sqrt{6}$时，$V'>0$，当$2\sqrt{6}<l\le 3\sqrt{3}$时，$V'<0$，

所以当$l=2\sqrt{6}$时，正四棱锥的体积V取最大值，最大值为$\frac{64}{3}$，

又$l=3$时，$V=\frac{27}{4}$，$l=3\sqrt{3}$时，$V=\frac{81}{4}$，

所以正四棱锥的体积V的最小值为$\frac{27}{4}$，

所以该正四棱锥体积的取值范围是$\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$.

故选：C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　）

A. 直线BC_1与DA_1所成的角为$90°$

B. 直线BC_1与CA_1所成的角为$90°$

C. 直线BC_1与平面BB_1D_1D所成的角为$45°$

D. 直线BC_1与平面$ABCD$所成的角为$45°$

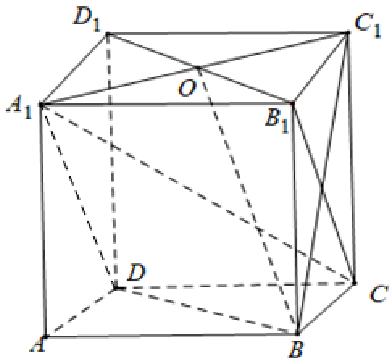
【答案】ABD

【解析】

【分析】数形结合，依次对所给选项进行判断即可.

【详解】如图，连接 B_1C 、BC_1，因为 $DA_1 // B_1C$，所以直线 BC_1 与 B_1C 所成的角即为直线 BC_1 与 DA_1 所成的角，

因为四边形 BB_1C_1C 为正方形，则 $B_1C \perp BC_1$，故直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$，A 正确；



连接 A_1C，因为 $A_1B_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C，$BC_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C，则 $A_1B_1 \perp BC_1$，

因为 $B_1C \perp BC_1$，$A_1B_1 \cap B_1C = B_1$，所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1C，

又 $A_1C \subset$ 平面 A_1B_1C，所以 $BC_1 \perp CA_1$，故 B 正确；

连接 A_1C_1，设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$，连接 BO，

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$C_1O \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $C_1O \perp B_1B$，

因为 $C_1O \perp B_1D_1$，$B_1D_1 \cap B_1B = B_1$，所以 $C_1O \perp$ 平面 BB_1D_1D，

所以 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角，

设正方体棱长为1，则 $C_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$BC_1 = \sqrt{2}$，$\sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}$，

所以，直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 30°，故 C 错误；

因为 $C_1C \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle C_1BC$ 为直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，易得 $\angle C_1BC = 45^\circ$，故 D 正确.

故选：ABD

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$，则（　　）

A. $f(x)$ 有两个极值点

B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

【答案】AC

【解析】

【分析】利用极值点的定义可判断 A，结合 $f(x)$ 的单调性、极值可判断 B，利用平移可判

断C；利用导数的几何意义判断D.

【详解】由题，$f'(x)=3x^2-1$，令$f'(x)>0$得$x>\frac{\sqrt{3}}{3}$或$x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

令$f'(x)<0$得$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以$f(x)$在$(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$上单调递减，在$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$，$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$上单调递增，

所以$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$是极值点，故A正确；

因$f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=1+\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f(\frac{\sqrt{3}}{3})=1-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$，$f(-2)=-5<0$，

所以，函数$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$上有一个零点，

当$x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$f(x)\geq f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$，即函数$f(x)$在$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上无零点，

综上所述，函数$f(x)$有一个零点，故B错误；

令$h(x)=x^3-x$，该函数的定义域为$\mathbf{R}$，$h(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-h(x)$，

则$h(x)$是奇函数，$(0,0)$是$h(x)$的对称中心，

将$h(x)$的图象向上移动一个单位得到$f(x)$的图象，

所以点$(0,1)$是曲线$y=f(x)$的对称中心，故C正确；

令$f'(x)=3x^2-1=2$，可得$x=\pm1$，又$f(1)=f(-1)=1$，

当切点为$(1,1)$时，切线方程为$y=2x-1$，当切点为$(-1,1)$时，切线方程为$y=2x+3$，

故D错误.

故选：AC.

11. 已知O为坐标原点，点$A(1,1)$在抛物线$C:x^2=2py(p>0)$上，过点$B(0,-1)$的直线交C于P，Q两点，则（　　）

A. C的准线为$y=-1$

B. 直线AB与C相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$

D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

【答案】BCD

【解析】

【分析】求出抛物线方程可判断A，联立AB与抛物线的方程求交点可判断B，利用距离

公式及弦长公式可判断 C、D.

【详解】将点 A 的代入抛物线方程得$1=2p$，所以抛物线方程为$x^2=y$，故准线方程为

$y=-\dfrac{1}{4}$，A 错误；

$k_{AB}=\dfrac{1-(-1)}{1-0}=2$，所以直线$AB$的方程为$y=2x-1$，

联立$\begin{cases}y=2x-1\\x^2=y\end{cases}$，可得$x^2-2x+1=0$，解得$x=1$，故 B 正确；

设过B的直线为l，若直线l与y轴重合，则直线l与抛物线C只有一个交点，

所以，直线l的斜率存在，设其方程为$y=kx-1$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=kx-1\\x^2=y\end{cases}$，得$x^2-kx+1=0$，

所以$\begin{cases}\Delta=k^2-4>0\\x_1+x_2=k\\x_1x_2=1\end{cases}$，所以$k>2$或$k<-2$，$y_1y_2=(x_1x_2)^2=1$，

又$|OP|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{y_1+y_1^2}$，$|OQ|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{y_2+y_2^2}$，

所以$|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{y_1y_2(1+y_1)(1+y_2)}=\sqrt{kx_1\times kx_2}=|k|>2=|OA|^2$，故 C 正确；

因为$|BP|=\sqrt{1+k^2}|x_1|$，$|BQ|=\sqrt{1+k^2}|x_2|$，

所以$|BP|\cdot|BQ|=(1+k^2)|x_1x_2|=1+k^2>5$，而$|BA|^2=5$，故 D 正确.

故选：BCD

12. 已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，记$g(x)=f'(x)$，若$f\left(\dfrac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，则（　　）

A. $f(0)=0$　　B. $g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$　　C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

【答案】BC

【解析】

【分析】转化题设条件为函数的对称性，结合原函数与导函数图象的关系，根据函数的性质逐项判断即可得解.

【详解】因为$f\left(\dfrac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，

所以 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$ 即 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$，$g(2+x)=g(2-x)$，

所以 $f(3-x)=f(x)$，$g(4-x)=g(x)$，则 $f(-1)=f(4)$，故 C 正确；

函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象分别关于直线 $x=\frac{3}{2},x=2$ 对称，

又 $g(x)=f'(x)$，且函数 $f(x)$ 可导，

所以 $g\left(\frac{3}{2}\right)=0,g(3-x)=-g(x)$，

所以 $g(4-x)=g(x)=-g(3-x)$，所以 $g(x+2)=-g(x+1)=g(x)$，

所以 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$，$g(-1)=g(1)=-g(2)$，故 B 正确，D 错误；

若函数 $f(x)$ 满足题设条件，则函数 $f(x)+C$（C 为常数）也满足题设条件，所以无法确定 $f(x)$ 的函数值，故 A 错误.

故选：BC.

【点睛】关键点点睛：解决本题的关键是转化题干条件为抽象函数的性质，准确把握原函数与导函数图象间的关系，准确把握函数的性质（必要时结合图象）即可得解.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为________________（用数字作答）.

【答案】-28

【解析】

【分析】$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 可化为 $(x+y)^8-\frac{y}{x}(x+y)^8$，结合二项式展开式的通项公式求解.

【详解】因为 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8=(x+y)^8-\frac{y}{x}(x+y)^8$，

所以 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^6 的项为 $C_8^6x^2y^6-\frac{y}{x}C_8^5x^3y^5=-28x^2y^6$，

$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为-28

故答案为：-28

14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程

________________.

【答案】$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ 或 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$ 或 $x=-1$

【解析】

【分析】先判断两圆位置关系，分情况讨论即可.

【详解】圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $O\left(0,0\right)$，半径为1，圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的圆心 O_1 为 $(3,4)$，半径为4，

两圆圆心距为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$，等于两圆半径之和，故两圆外切，

如图，

当切线为 l 时，因为 $k_{OO_1}=\frac{4}{3}$，所以 $k_l=-\frac{3}{4}$，设方程为 $y=-\frac{3}{4}x+t(t>0)$

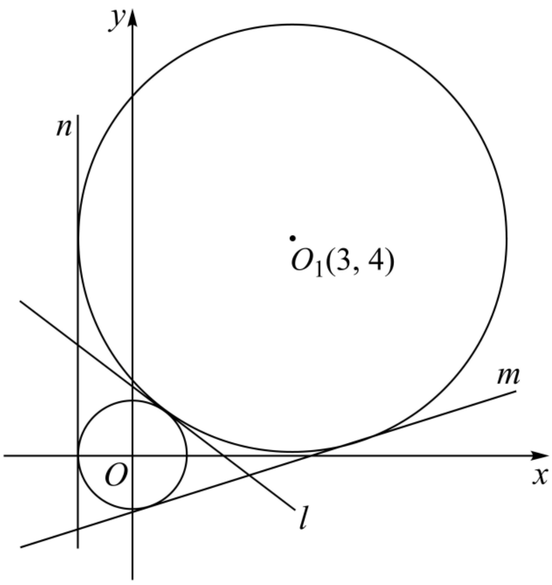
O 到 l 的距离 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}=1$，解得 $t=\frac{5}{4}$，所以 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$，

当切线为 m 时，设直线方程为 $kx+y+p=0$，其中 $p>0$，$k<0$，

由题意 $\begin{cases}\frac{|p|}{\sqrt{1+k^2}}=1\\ \frac{|3k+4+p|}{\sqrt{1+k^2}}=4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\frac{7}{24}\\ p=\frac{25}{24}\end{cases}$，$y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$

当切线为 n 时，易知切线方程为 $x=-1$，

故答案为：$y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ 或 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$ 或 $x=-1$.



15. 若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是

________.

【答案】$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

【解析】

【分析】设出切点横坐标 x_0，利用导数的几何意义求得切线方程，根据切线经过原点得到关于 x_0 的方程，根据此方程应有两个不同的实数根，求得 a 的取值范围.

【详解】∵ $y=(x+a)\mathrm{e}^x$，∴ $y'=(x+1+a)\mathrm{e}^x$，

设切点为 (x_0,y_0)，则 $y_0=(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0}$，切线斜率 $k=(x_0+1+a)\mathrm{e}^{x_0}$，

切线方程为：$y-(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0}=(x_0+1+a)\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$，

∵切线过原点，∴ $-(x_0+a)\mathrm{e}^{x_0}=(x_0+1+a)\mathrm{e}^{x_0}(-x_0)$，

整理得：$x_0^2+ax_0-a=0$，

∵切线有两条，∴ �$=a^2+4a>0$，解得 $a<-4$ 或 $a>0$，

∴ a 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$，

故答案为：$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$. 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则 $\triangle ADE$ 的周长是

________.

【答案】13

【解析】

【分析】利用离心率得到椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，即 $3x^2+4y^2-12c^2=0$，根据离心率得到直线 AF_2 的斜率，进而利用直线的垂直关系得到直线 DE 的斜率，写出直线 DE 的方程：$x=\sqrt{3}y-c$，代入椭圆方程 $3x^2+4y^2-12c^2=0$，整理化简得到：$13y^2-6\sqrt{3}cy-9c^2=0$，利用弦长公式求得 $c=\dfrac{13}{8}$，得 $a=2c=\dfrac{13}{4}$，根据对称性将 $\triangle ADE$ 的周长转化为 $\triangle F_2DE$ 的周长，利用椭圆的定义得到周长为 $4a=13$.

【详解】∵椭圆的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，∴ $a=2c$，∴ $b^2=a^2-c^2=3c^2$，∴椭圆的方程

为$\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，即$3x^2+4y^2-12c^2=0$，不妨设左焦点为$F_1$，右焦点为$F_2$，如图所示，$\because AF_2=a$，$OF_2=c$，$a=2c$，$\therefore \angle AF_2O=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \triangle AF_1F_2$为正三角形，$\because$过$F_1$且垂直于$AF_2$的直线与$C$交于$D$，$E$两点，$DE$为线段$AF_2$的垂直平分线，$\therefore$直线$DE$的斜率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，斜率倒数为$\sqrt{3}$，直线$DE$的方程：$x=\sqrt{3}y-c$，代入椭圆方程

$3x^2+4y^2-12c^2=0$，整理化简得到：$13y^2-6\sqrt{3}cy-9c^2=0$，

判别式�$=\left(6\sqrt{3}c\right)^2+4\times13\times9c^2=6^2\times16\times c^2$，

$\therefore |CD|=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,|y_1-y_2|=2\times\dfrac{\sqrt{�}}{13}=2\times6\times4\times\dfrac{c}{13}=6$，

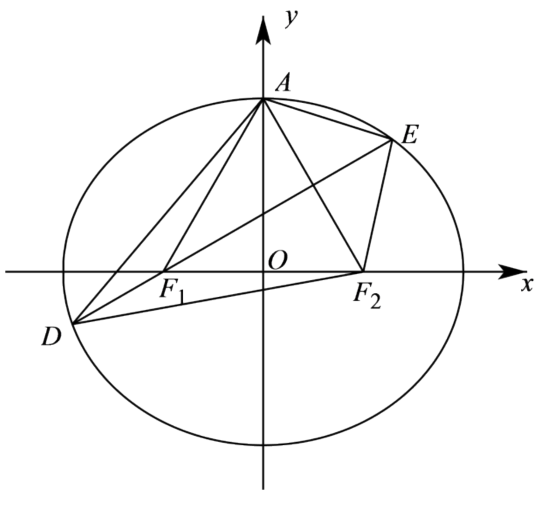
$\therefore\ c=\dfrac{13}{8}$，得$a=2c=\dfrac{13}{4}$，

$\because DE$为线段AF_2的垂直平分线，根据对称性，$AD=DF_2$，$AE=EF_2$，$\therefore \triangle ADE$的周长等于$\triangle F_2DE$的周长，利用椭圆的定义得到$\triangle F_2DE$周长为

$|DF_2|+|EF_2|+|DE|=|DF_2|+|EF_2|+|DF_1|+|EF_1|=|DF_1|+|DF_2|+|EF_1|+|EF_2|=2a+2a=4a=13$

.

故答案为：13.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知$a_1=1$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\dfrac{1}{3}$的等差数列．

（1）求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$．

【答案】（1）$a_n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）利用等差数列的通项公式求得$\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}\left(n-1\right)=\frac{n+2}{3}$，得到$S_n=\frac{\left(n+2\right)a_n}{3}$，利用和与项的关系得到当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{\left(n+2\right)a_n}{3}-\frac{\left(n+1\right)a_{n-1}}{3}$，进而得：$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，利用累乘法求得$a_n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$，检验对于$n=1$也成立，得到$\left\{a_n\right\}$的通项公式$a_n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$；

（2）由（1）的结论，利用裂项求和法得到$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$，进而证得.

【小问1详解】

$\because a_1=1$，$\therefore S_1=a_1=1$，$\therefore \frac{S_1}{a_1}=1$，

又$\because \left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，

$\therefore \frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}\left(n-1\right)=\frac{n+2}{3}$，$\therefore S_n=\frac{\left(n+2\right)a_n}{3}$，

$\therefore$当$n\geq 2$时，$S_{n-1}=\frac{\left(n+1\right)a_{n-1}}{3}$，

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{\left(n+2\right)a_n}{3}-\frac{\left(n+1\right)a_{n-1}}{3}$，

整理得：$\left(n-1\right)a_n=\left(n+1\right)a_{n-1}$，

即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

$\therefore a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\ldots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$=1\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，

显然对于 $n=1$ 也成立，

$\therefore\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$；

【小问 2 详解】

$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$

18. 记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$．

（1）若 $C=\frac{2\pi}{3}$，求 B；

（2）求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值．

【答案】（1）$\frac{\pi}{6}$；

（2）$4\sqrt{2}-5$．

【解析】

【分析】（1）根据二倍角公式以及两角差的余弦公式可将 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$ 化成 $\cos(A+B)=\sin B$，再结合 $0<B<\frac{\pi}{2}$，即可求出；

（2）由（1）知，$C=\frac{\pi}{2}+B$，$A=\frac{\pi}{2}-2B$，再利用正弦定理以及二倍角公式将 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 化成 $4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5$，然后利用基本不等式即可解出．

【小问 1 详解】

因为 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\frac{\sin B}{\cos B}$，即

$\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=-\cos C=\frac{1}{2}$，

而 $0<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$；

【小问 2 详解】

由（1）知，$\sin B=-\cos C>0$，所以 $\frac{\pi}{2}<C<\pi,0<B<\frac{\pi}{2}$，

而 $\sin B=-\cos C=\sin\left(C-\frac{\pi}{2}\right)$，

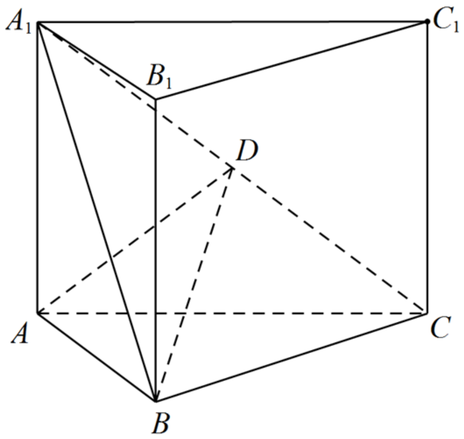
所以 $C=\frac{\pi}{2}+B$，即有 $A=\frac{\pi}{2}-2B$．

所以 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\cos^2 2B+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}$

$=\frac{\left(2\cos^2 B-1\right)^2+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}=4\cos^2 B+\frac{2}{\cos^2 B}-5\geq 2\sqrt{8}-5=4\sqrt{2}-5$．

当且仅当 $\cos^2 B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，所以 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$．

19. 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$．



（1）求 A 到平面 A_1BC 的距离；

（2）设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值．

【答案】（1）$\sqrt{2}$

（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】（1）由等体积法运算即可得解；

（2）由面面垂直的性质及判定可得 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，建立空间直角坐标系，利用空间

向量法即可得解.

【小问 1 详解】

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h，

则 $V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\frac{2\sqrt{2}}{3}h=V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1A=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{4}{3}$，

解得 $h=\sqrt{2}$，

所以点 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$；

【小问 2 详解】

取 A_1B 的中点 E,连接 AE,如图，因为 $AA_1=AB$，所以 $AE\perp A_1B$，

又平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$，

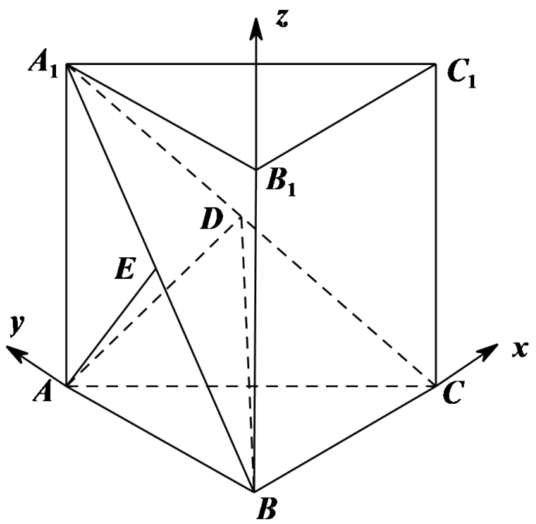
且 $AE\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AE\perp$ 平面 A_1BC，

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，

由 $BC\subset$ 平面 A_1BC，$BC\subset$ 平面 ABC 可得 $AE\perp BC$，$BB_1\perp BC$，

又 $AE,BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1 且相交，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

所以 BC,BA,BB_1 两两垂直，以 B 为原点，建立空间直角坐标系，如图，



由（1）得 $AE=\sqrt{2}$，所以 $AA_1=AB=2$，$A_1B=2\sqrt{2}$，所以 $BC=2$，

则 $A(0,2,0),A_1(0,2,2),B(0,0,0),C(2,0,0)$,所以 A_1C 的中点 $D(1,1,1)$，

则 $\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{BA}=(0,2,0),\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，

设平面 ABD 的一个法向量 $\overrightarrow{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BD}=x+y+z=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BA}=2y=0\end{cases}$，

可取$\overrightarrow{m}=(1,0,-1)$，

设平面 BDC 的一个法向量$\overrightarrow{n}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BD}=a+b+c=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{BC}=2a=0\end{cases}$，

可取$\overrightarrow{n}=(0,1,-1)$，

则$\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

20. 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

（1）能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2）从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”．$\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}$与$\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}$的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R．

（i）证明：$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$；

（ii）利用该调查数据，给出 $P(A|B),P(A|\overline{B})$ 的估计值，并利用（i）的结果给出 R 的估计值．

附$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】（1）答案见解析

（2）（i）证明见解析；(ii) $R=6$；

【解析】

【分析】(1)由所给数据结合公式求出K^2的值，将其与临界值比较大小，由此确定是否有99%的把握认为患该疾病群体与未黄该疾病群体的卫生习惯有差异；(2)(i）根据定义结合条件概率公式即可完成证明；(ii)根据（i）结合已知数据求R.

【小问1详解】

由已知$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200(40\times90-60\times10)^2}{50\times150\times100\times100}=24$，

又$P(K^2\geq6.635)$=0.01，$24>6.635$，

所以有99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

【小问2详解】

(i)因为$R=\dfrac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}\cdot\dfrac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(B|\bar{A})}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\cdot\dfrac{P(A)}{P(A\bar{B})}\cdot\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}\cdot\dfrac{P(\bar{A})}{P(\bar{A}B)}$，

所以$R=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\cdot\dfrac{P(B)}{P(\bar{A}B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}\cdot\dfrac{P(\bar{B})}{P(A\bar{B})}$

所以$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$，

(ii)

由已知$P(A|B)=\dfrac{40}{100}$，$P(A|\bar{B})=\dfrac{10}{100}$，

又$P(\bar{A}|B)=\dfrac{60}{100}$，$P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{90}{100}$，

所以$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$=6

21. 已知点$A(2,1)$在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，直线$l$交$C$于$P$，$Q$两点，直线$AP,AQ$的斜率之和为0.

（1）求l的斜率；

（2）若$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求$\triangle PAQ$的面积.

【答案】（1）-1；

（2）$\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$.

【解析】

【分析】（1）由点$A(2,1)$在双曲线上可求出a，易知直线l的斜率存在，设$l: y=kx+m$，$P\left(x_1, y_1\right), Q\left(x_2, y_2\right)$，再根据$k_{AP}+k_{BP}=0$，即可解出$l$的斜率；

（2）根据直线AP, AQ的斜率之和为0可知直线AP, AQ的倾斜角互补，再根据$\tan \angle PAQ=2\sqrt{2}$即可求出直线$AP, AQ$的斜率，再分别联立直线$AP, AQ$与双曲线方程求出点$P, Q$的坐标，即可得到直线$PQ$的方程以及$PQ$的长，由点到直线的距离公式求出点A到直线$PQ$的距离，即可得出$\triangle PAQ$的面积.

【小问1详解】

因为点$A(2,1)$在双曲线$C: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，所以$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{a^2-1}=1$，解得$a^2=2$，

即双曲线$C: \dfrac{x^2}{2}-y^2=1$

易知直线l的斜率存在，设$l: y=kx+m$，$P\left(x_1, y_1\right), Q\left(x_2, y_2\right)$，

联立$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases}$可得，$\left(1-2k^2\right)x^2-4mkx-2m^2-2=0$，

所以，$x_1+x_2=-\dfrac{4mk}{2k^2-1}, x_1x_2=\dfrac{2m^2+2}{2k^2-1}$，

$\Delta=16m^2k^2+4\left(2m^2+2\right)\left(2k^2-1\right)>0 \Rightarrow m^2-1+2k^2>0$.

所以由$k_{AP}+k_{BP}=0$可得，$\dfrac{y_2-1}{x_2-2}+\dfrac{y_1-1}{x_1-2}=0$，

即$\left(x_1-2\right)\left(kx_2+m-1\right)+\left(x_2-2\right)\left(kx_1+m-1\right)=0$，

即$2kx_1x_2+\left(m-1-2k\right)\left(x_1+x_2\right)-4\left(m-1\right)=0$，

所以$2k \times \dfrac{2m^2+2}{2k^2-1}+\left(m-1-2k\right)\left(-\dfrac{4mk}{2k^2-1}\right)-4\left(m-1\right)=0$，

化简得，$8k^2+4k-4+4m\left(k+1\right)=0$，即$\left(k+1\right)\left(2k-1+m\right)=0$，

所以$k=-1$或$m=1-2k$，

当$m=1-2k$时，直线$l: y=kx+m=k\left(x-2\right)+1$过点$A\left(2,1\right)$，与题意不符，舍去，

故$k=-1$.

【小问2详解】

不妨设直线PA, PB的倾斜角为$\alpha, \beta\left(\alpha<\beta\right)$，因为$k_{AP}+k_{BP}=0$，所以$\alpha+\beta=\pi$，

因为$\tan \angle PAQ=2\sqrt{2}$，所以$\tan\left(\beta-\alpha\right)=2\sqrt{2}$，即$\tan 2\alpha=-2\sqrt{2}$，

即 $\sqrt{2}\tan^2\alpha-\tan\alpha-\sqrt{2}=0$，解得 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，

于是，直线 $PA: y=\sqrt{2}(x-2)+1$，直线 $PB: y=-\sqrt{2}(x-2)+1$，

联立 $\begin{cases} y=\sqrt{2}(x-2)+1 \\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases}$ 可得，$\dfrac{3}{2}x^2+2(1-2\sqrt{2})x+10-4\sqrt{2}=0$，

因为方程有一个根为 2，所以 $x_P=\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3}$，$y_P=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}$，

同理可得，$x_Q=\dfrac{10+4\sqrt{2}}{3}$，$y_Q=\dfrac{-4\sqrt{2}-5}{3}$．

所以 $PQ: x+y-\dfrac{5}{3}=0$，$|PQ|=\dfrac{16}{3}$，

点 A 到直线 PQ 的距离 $d=\dfrac{\left|2+1-\dfrac{5}{3}\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

故 $\triangle PAQ$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$．

22. 已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

（1）求 a；

（2）证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

【答案】（1）$a=1$

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）根据导数可得函数的单调性，从而可得相应的最小值，根据最小值相等可求 a.注意分类讨论.

（2）根据（1）可得当 $b>1$ 时，$\mathrm{e}^x-x=b$ 的解的个数、$x-\ln x=b$ 的解的个数均为 2，构建新函数 $h(x)=\mathrm{e}^x+\ln x-2x$，利用导数可得该函数只有一个零点且可得 $f(x),g(x)$ 的大小关系，根据存在直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 有三个不同的交点可得 b 的取值，再根据两类方程的根的关系可证明三根成等差数列.

【小问 1 详解】

$f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ 的定义域为 R，而 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

若 $a\le 0$，则 $f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 无最小值，故 $a>0$.

$g(x)=ax-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，而 $g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.

当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上为减函数，

当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上为增函数，

故 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$.

当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上为减函数，

当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上为增函数，

故 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=1-\ln\frac{1}{a}$.

因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值，

故 $1-\ln\frac{1}{a}=a-a\ln a$，整理得到 $\frac{a-1}{1+a}=\ln a$，其中 $a>0$，

设 $g(a)=\frac{a-1}{1+a}-\ln a, a>0$，则 $g'(a)=\frac{2}{(1+a)^2}-\frac{1}{a}=\frac{-a^2-1}{a(1+a)^2}\leq 0$，

故 $g(a)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的减函数，而 $g(1)=0$，

故 $g(a)=0$ 的唯一解为 $a=1$，故 $\frac{1-a}{1+a}=\ln a$ 的解为 $a=1$.

综上，$a=1$.

【小问 2 详解】

由（1）可得 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$ 和 $g(x)=x-\ln x$ 的最小值为 $1-\ln 1=1-\ln\frac{1}{1}=1$.

当 $b>1$ 时，考虑 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解的个数、$x-\ln x=b$ 的解的个数.

设 $S(x)=\mathrm{e}^x-x-b$，$S'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

当 $x<0$ 时，$S'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$S'(x)>0$，

故 $S(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数，在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $S(x)_{\min}=S(0)=1-b<0$，

而 $S(-b)=\mathrm{e}^{-b}>0$，$S(b)=\mathrm{e}^b-2b$，

设 $u(b)=\mathrm{e}^b-2b$，其中 $b>1$，则 $u'(b)=\mathrm{e}^b-2>0$，

故 $u(b)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，故 $u(b)>u(1)=\mathrm{e}-2>0$，

故$S\left(b\right)>0$，故$S\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-b$有两个不同的零点，即$\mathrm{e}^{x}-x=b$的解的个数为2.

设$T\left(x\right)=x-\ln x-b$，$T'\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x}$，

当$0<x<1$时，$T'\left(x\right)<0$，当$x>1$时，$T'\left(x\right)>0$，

故$T\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上为减函数，在$\left(1,+\infty\right)$上为增函数，

所以$T\left(x\right)_{\min}=T\left(1\right)=1-b<0$，

而$T\left(\mathrm{e}^{-b}\right)=\mathrm{e}^{-b}>0$，$T\left(\mathrm{e}^{b}\right)=\mathrm{e}^{b}-2b>0$，

$T\left(x\right)=x-\ln x-b$有两个不同的零点即$x-\ln x=b$的解的个数为2.

当$b=1$，由（1）讨论可得$x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^{x}-x=b$仅有一个零点，

当$b<1$时，由（1）讨论可得$x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^{x}-x=b$均无零点，

故若存在直线$y=b$与曲线$y=f\left(x\right)$、$y=g\left(x\right)$有三个不同的交点，

则$b>1$.

设$h(x)=\mathrm{e}^{x}+\ln x-2x$，其中$x>0$，故$h'(x)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{x}-2$，

设$s\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，$x>0$，则$s'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-1>0$，

故$s\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上为增函数，故$s\left(x\right)>s\left(0\right)=0$即$\mathrm{e}^{x}>x+1$，

所以$h'(x)>x+\dfrac{1}{x}-1\geq 2-1>0$，所以$h(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上为增函数，

而$h(1)=\mathrm{e}-2>0$，$h(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{3}}}-3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}<\mathrm{e}-3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}<0$，

故$h\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上有且只有一个零点x_0，$\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}}<x_0<1$且：

当$0<x<x_0$时，$h\left(x\right)<0$即$\mathrm{e}^{x}-x<x-\ln x$即$f\left(x\right)<g\left(x\right)$，

当$x>x_0$时，$h\left(x\right)>0$即$\mathrm{e}^{x}-x>x-\ln x$即$f\left(x\right)>g\left(x\right)$，

因此若存在直线$y=b$与曲线$y=f\left(x\right)$、$y=g\left(x\right)$有三个不同的交点，

故$b=f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)>1$，

此时$\mathrm{e}^{x}-x=b$有两个不同的零点$x_1,x_0(x_1<0<x_0)$，

此时$x-\ln x=b$有两个不同的零点$x_0,x_4(0<x_0<1<x_4)$，

故$\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$，$\mathrm{e}^{x_0}-x_0=b$，$x_4-\ln x_4-b=0$，$x_0-\ln x_0-b=0$

所以 $x_4-b=\ln x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}=x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}-\left(x_4-b\right)-b=0$，

故 x_4-b 为方程 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解，同理 x_0-b 也为方程 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解

又 $\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$ 可化为 $\mathrm{e}^{x_1}=x_1+b$ 即 $x_1-\ln\left(x_1+b\right)=0$ 即 $\left(x_1+b\right)-\ln\left(x_1+b\right)-b=0$，

故 x_1+b 为方程 $x-\ln x=b$ 的解，同理 x_0+b 也为方程 $x-\ln x=b$ 的解，

所以 $\left\{x_1,x_0\right\}=\left\{x_0-b,x_4-b\right\}$，而 $b>1$，

故 $\begin{cases}x_0=x_4-b\\x_1=x_0-b\end{cases}$ 即 $x_1+x_4=2x_0$.

【点睛】思路点睛：函数的最值问题，往往需要利用导数讨论函数的单调性，此时注意对参数的分类讨论，而不同方程的根的性质，注意利用方程的特征找到两类根之间的关系.