

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

新课标 I 卷数学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ， $N = \{x \mid x^2 - x - 6 \geq 0\}$ ，则 $M \cap N = (\quad)$
- A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】方法一：由一元二次不等式的解法求出集合 N ，即可根据交集的运算解出。

方法二：将集合 M 中的元素逐个代入不等式验证，即可解出。

【详解】方法一：因为 $N = \{x \mid x^2 - x - 6 \geq 0\} = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ ，而 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，

所以 $M \cap N = \{-2\}$ 。

故选：C。

方法二：因为 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，将 $-2, -1, 0, 1, 2$ 代入不等式 $x^2 - x - 6 \geq 0$ ，只有 -2 使不等式成立，

【详解】函数 $y = 2^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增，而函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

则有函数 $y = x(x-a) = (x-\frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，因此 $\frac{a}{2} \geq 1$ ，解得 $a \geq 2$ ，

所以 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$ 。

故选：D

5. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 . 若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$ ，则 $a = (\quad)$

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定的椭圆方程，结合离心率的意义列式计算作答.

【详解】由 $e_2 = \sqrt{3}e_1$ ，得 $e_2^2 = 3e_1^2$ ，因此 $\frac{4-1}{4} = 3 \times \frac{a^2-1}{a^2}$ ，而 $a > 1$ ，所以 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 。

故选：A

6. 过点 $(0, -2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α ，则 $\sin \alpha = (\quad)$

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】方法一：根据切线的性质求切线长，结合倍角公式运算求解；方法二：根据切线的性质求切线长，结合余弦定理运算求解；方法三：根据切线结合点到直线的距离公式可得 $k^2 + 8k + 1 = 0$ ，利用韦达定理结合夹角公式运算求解.

【详解】方法一：因为 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ ，即 $(x-2)^2 + y^2 = 5$ ，可得圆心 $C(2,0)$ ，半径 $r = \sqrt{5}$ ，

过点 $P(0, -2)$ 作圆 C 的切线，切点为 A, B ，

因为 $|PC| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ ，则 $|PA| = \sqrt{|PC|^2 - r^2} = \sqrt{3}$ ，

可得 $\sin \angle APC = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ ， $\cos \angle APC = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ，

则 $\sin \angle APB = \sin 2\angle APC = 2 \sin \angle APC \cos \angle APC = 2 \times \frac{\sqrt{10}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$\cos \angle APB = \cos 2\angle APC = \cos^2 \angle APC - \sin^2 \angle APC = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = -\frac{1}{4} < 0$,

即 $\angle APB$ 为钝角,

所以 $\sin \alpha = \sin(\pi - \angle APB) = \sin \angle APB = \frac{\sqrt{15}}{4}$;

法二: 圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 的圆心 $C(2, 0)$, 半径 $r = \sqrt{5}$,

过点 $P(0, -2)$ 作圆 C 的切线, 切点为 A, B , 连接 AB ,

可得 $|PC| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, 则 $|PA| = |PB| = \sqrt{|PC|^2 - r^2} = \sqrt{3}$,

因为 $|PA|^2 + |PB|^2 - 2|PA| \cdot |PB| \cos \angle APB = |CA|^2 + |CB|^2 - 2|CA| \cdot |CB| \cos \angle ACB$

且 $\angle ACB = \pi - \angle APB$, 则 $3 + 3 - 6 \cos \angle APB = 5 + 5 - 10 \cos(\pi - \angle APB)$,

即 $3 - \cos \angle APB = 5 + 5 \cos \angle APB$, 解得 $\cos \angle APB = -\frac{1}{4} < 0$,

即 $\angle APB$ 为钝角, 则 $\cos \alpha = \cos(\pi - \angle APB) = -\cos \angle APB = \frac{1}{4}$,

且 α 为锐角, 所以 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$;

方法三: 圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 的圆心 $C(2, 0)$, 半径 $r = \sqrt{5}$,

若切线斜率不存在, 则切线方程为 $y = 0$, 则圆心到切点的距离 $d = 2 > r$, 不合题意;

若切线斜率存在, 设切线方程为 $y = kx - 2$, 即 $kx - y - 2 = 0$,

则 $\frac{|2k - 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{5}$, 整理得 $k^2 + 8k + 1 = 0$, 且 $\Delta = 64 - 4 = 60 > 0$

设两切线斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 + k_2 = -8, k_1 k_2 = 1$,

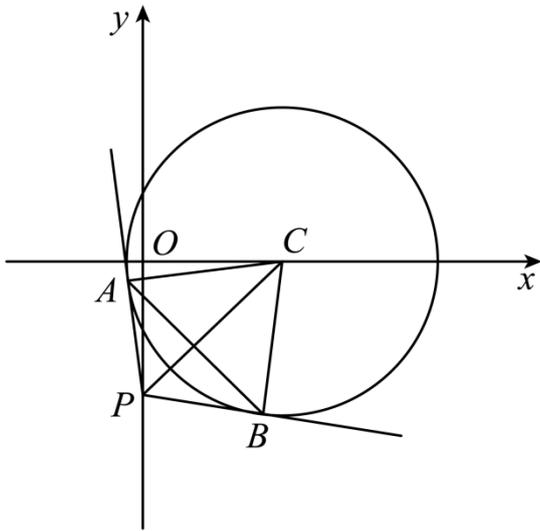
可得 $|k_1 - k_2| = \sqrt{(k_1 + k_2)^2 - 4k_1 k_2} = 2\sqrt{15}$,

所以 $\tan \alpha = \frac{|k_1 - k_2|}{1 + k_1 k_2} = \sqrt{15}$, 即 $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{15}$, 可得 $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{15}}$,

则 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{15} = 1$,

且 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin \alpha > 0$, 解得 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

故选: B.



7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则 ()

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】 C

【解析】

【分析】 利用充分条件、必要条件的定义及等差数列的定义, 再结合数列前 n 项和与第 n 项的关系推理判断作答.

【详解】 方法 1, 甲: $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其首项为 a_1 , 公差为 d ,

$$\text{则 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d, \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}, \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{d}{2},$$

因此 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 则甲是乙的充分条件;

$$\text{反之, 乙: } \left\{\frac{S_n}{n}\right\} \text{ 为等差数列, 即 } \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{nS_{n+1} - (n+1)S_n}{n(n+1)} = \frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)} \text{ 为常数, 设为 } t,$$

$$\text{即 } \frac{na_{n+1} - S_n}{n(n+1)} = t, \text{ 则 } S_n = na_{n+1} - t \cdot n(n+1), \text{ 有 } S_{n-1} = (n-1)a_n - t \cdot n(n-1), n \geq 2,$$

两式相减得: $a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n - 2tn$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2t$, 对 $n=1$ 也成立,

因此 $\{a_n\}$ 为等差数列，则甲是乙的必要条件，

所以甲是乙的充要条件，C 正确.

方法 2，甲： $\{a_n\}$ 为等差数列，设数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 ，公差为 d ，即 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ，

则 $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}$ ，因此 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，即甲是乙的充分条件；

反之，乙： $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列，即 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = D$ ， $\frac{S_n}{n} = S_1 + (n-1)D$ ，

即 $S_n = nS_1 + n(n-1)D$ ， $S_{n-1} = (n-1)S_1 + (n-1)(n-2)D$ ，

当 $n \geq 2$ 时，上两式相减得： $S_n - S_{n-1} = S_1 + 2(n-1)D$ ，当 $n=1$ 时，上式成立，

于是 $a_n = a_1 + 2(n-1)D$ ，又 $a_{n+1} - a_n = a_1 + 2nD - [a_1 + 2(n-1)D] = 2D$ 为常数，

因此 $\{a_n\}$ 为等差数列，则甲是乙的必要条件，

所以甲是乙的充要条件.

故选：C

8. 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ ， $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$ ，则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$ ().

A. $\frac{7}{9}$

B. $\frac{1}{9}$

C. $-\frac{1}{9}$

D. $-\frac{7}{9}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用和角、差角的正弦公式求出 $\sin(\alpha + \beta)$ ，再利用二倍角的余弦公式计算作答.

【详解】因为 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$ ，而 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$ ，因此 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}$ ，

则 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{3}$ ，

所以 $\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2(\alpha + \beta) = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

故选：B

【点睛】方法点睛：三角函数求值的类型及方法

(1) “给角求值”：一般所给出的角都是非特殊角，从表面来看较难，但非特殊角与特殊角总有一定关系. 解题时，要利用观察得到的关系，结合三角函数公式转化为特殊角的三角函数.

(2) “给值求值”：给出某些角的三角函数值，求另外一些角的三角函数值，解题关键在于“变角”，使其角相同或具有某种关系.

(3) “给值求角”：实质上转化为“给值求值”，关键也是变角，把所求角用含已知角的式子表示，由所得的函数值结合该函数的单调区间求得角，有时要压缩角的取值范围。

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 有一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_6 ，其中 x_1 是最小值， x_6 是最大值，则 ()

- A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的平均数
- B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的中位数
- C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 x_1, x_2, \dots, x_6 的标准差
- D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 x_1, x_2, \dots, x_6 的极差

【答案】BD

【解析】

【分析】根据题意结合平均数、中位数、标准差以及极差的概念逐项分析判断。

【详解】对于选项 A：设 x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数为 m ， x_1, x_2, \dots, x_6 的平均数为 n ，

$$\text{则 } n - m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} - \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{4} = \frac{2(x_1 + x_6) - (x_5 + x_2 + x_3 + x_4)}{12},$$

因为没有确定 $2(x_1 + x_6), x_5 + x_2 + x_3 + x_4$ 的大小关系，所以无法判断 m, n 的大小，

例如：1, 2, 3, 4, 5, 6，可得 $m = n = 3.5$ ；

例如 1, 1, 1, 1, 1, 7，可得 $m = 1, n = 2$ ；

例如 1, 2, 2, 2, 2, 2，可得 $m = 2, n = \frac{11}{6}$ ；故 A 错误；

对于选项 B：不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6$ ，

可知 x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的中位数均为 $\frac{x_3 + x_4}{2}$ ，故 B 正确；

对于选项 C：因为 x_1 是最小值， x_6 是最大值，

则 x_2, x_3, x_4, x_5 的波动性不大于 x_1, x_2, \dots, x_6 的波动性，即 x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不大于 x_1, x_2, \dots, x_6 的标准差，

例如：2, 4, 6, 8, 10, 12，则平均数 $n = \frac{1}{6}(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12) = 7$ ，

$$\text{标准差 } s_1 = \sqrt{\frac{1}{6}[(2-7)^2 + (4-7)^2 + (6-7)^2 + (8-7)^2 + (10-7)^2 + (12-7)^2]} = \frac{\sqrt{105}}{3},$$

4, 6, 8, 10, 则平均数 $m = \frac{1}{4}(4+6+8+10) = 7$,

$$\text{标准差 } s_2 = \sqrt{\frac{1}{4}[(4-7)^2 + (6-7)^2 + (8-7)^2 + (10-7)^2]} = \sqrt{5},$$

显然 $\frac{\sqrt{105}}{3} > 5$, 即 $s_1 > s_2$; 故 C 错误;

对于选项 D: 不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6$,

则 $x_6 - x_1 \geq x_5 - x_2$, 当且仅当 $x_1 = x_2, x_5 = x_6$ 时, 等号成立, 故 D 正确;

故选: BD.

10. 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级 $L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$, 其中常数

$p_0 (p_0 > 0)$ 是听觉下限阈值, p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离 /m	声压级 /dB
燃油汽车	10	60 ~ 90
混合动力汽车	10	50 ~ 60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3 , 则 ().

A. $p_1 \geq p_2$

B. $p_2 > 10p_3$

C. $p_3 = 100p_0$

D. $p_1 \leq 100p_2$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意可知 $L_{p_1} \in [60, 90], L_{p_2} \in [50, 60], L_{p_3} = 40$, 结合对数运算逐项分析判断.

【详解】由题意可知: $L_{p_1} \in [60, 90], L_{p_2} \in [50, 60], L_{p_3} = 40$,

对于选项 A: 可得 $L_{p_1} - L_{p_2} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_0} - 20 \times \lg \frac{p_2}{p_0} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2}$,

因为 $L_{p_1} \geq L_{p_2}$ ，则 $L_{p_1} - L_{p_2} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \geq 0$ ，即 $\lg \frac{p_1}{p_2} \geq 0$ ，

所以 $\frac{p_1}{p_2} \geq 1$ 且 $p_1, p_2 > 0$ ，可得 $p_1 \geq p_2$ ，故 A 正确；

对于选项 B：可得 $L_{p_2} - L_{p_3} = 20 \times \lg \frac{p_2}{p_0} - 20 \times \lg \frac{p_3}{p_0} = 20 \times \lg \frac{p_2}{p_3}$ ，

因为 $L_{p_2} - L_{p_3} = L_{p_2} - 40 \geq 10$ ，则 $20 \times \lg \frac{p_2}{p_3} \geq 10$ ，即 $\lg \frac{p_2}{p_3} \geq \frac{1}{2}$ ，

所以 $\frac{p_2}{p_3} \geq \sqrt{e}$ 且 $p_2, p_3 > 0$ ，可得 $p_2 \geq \sqrt{e} p_3$ ，

当且仅当 $L_{p_2} = 50$ 时，等号成立，故 B 错误；

对于选项 C：因为 $L_{p_3} = 20 \times \lg \frac{p_3}{p_0} = 40$ ，即 $\lg \frac{p_3}{p_0} = 2$ ，

可得 $\frac{p_3}{p_0} = 100$ ，即 $p_3 = 100 p_0$ ，故 C 正确；

对于选项 D：由选项 A 可知： $L_{p_1} - L_{p_2} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2}$ ，

且 $L_{p_1} - L_{p_2} \leq 90 - 50 = 40$ ，则 $20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \leq 40$ ，

即 $\lg \frac{p_1}{p_2} \leq 2$ ，可得 $\frac{p_1}{p_2} \leq 100$ ，且 $p_1, p_2 > 0$ ，所以 $p_1 \leq 100 p_2$ ，故 D 正确；

故选：ACD.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$ ，则 ().

A. $f(0) = 0$

B. $f(1) = 0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

【答案】ABC

【解析】

【分析】方法一：利用赋值法，结合函数奇偶性的判断方法可判断选项 ABC，举反例 $f(x) = 0$ 即可排除选项 D.

方法二：选项 ABC 的判断与方法一同，对于 D，可构造特殊函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 进行判断即可。

【详解】方法一：

因为 $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$,

对于 A，令 $x = y = 0$ ， $f(0) = 0f(0) + 0f(0) = 0$ ，故 A 正确。

对于 B，令 $x = y = 1$ ， $f(1) = 1f(1) + 1f(1)$ ，则 $f(1) = 0$ ，故 B 正确。

对于 C，令 $x = y = -1$ ， $f(1) = f(-1) + f(-1) = 2f(-1)$ ，则 $f(-1) = 0$ ，

令 $y = -1$ ， $f(-x) = f(x) + x^2 f(-1) = f(x)$ ，

又函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 C 正确，

对于 D，不妨令 $f(x) = 0$ ，显然符合题设条件，此时 $f(x)$ 无极值，故 D 错误。

方法二：

因为 $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$ ，

对于 A，令 $x = y = 0$ ， $f(0) = 0f(0) + 0f(0) = 0$ ，故 A 正确。

对于 B，令 $x = y = 1$ ， $f(1) = 1f(1) + 1f(1)$ ，则 $f(1) = 0$ ，故 B 正确。

对于 C，令 $x = y = -1$ ， $f(1) = f(-1) + f(-1) = 2f(-1)$ ，则 $f(-1) = 0$ ，

令 $y = -1$ ， $f(-x) = f(x) + x^2 f(-1) = f(x)$ ，

又函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 C 正确，

对于 D，当 $x^2 y^2 \neq 0$ 时，对 $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$ 两边同时除以 $x^2 y^2$ ，得到 $\frac{f(xy)}{x^2 y^2} = \frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(y)}{y^2}$ ，

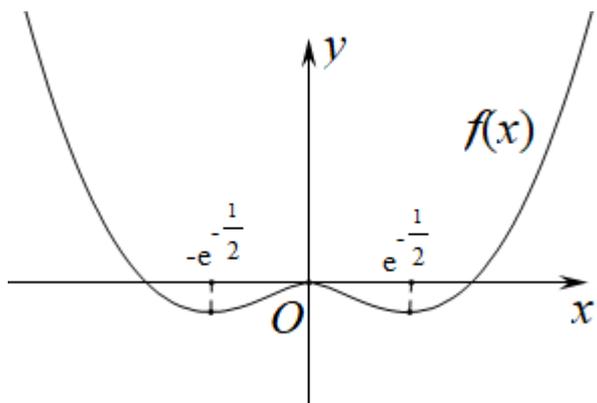
故可以设 $\frac{f(x)}{x^2} = \ln|x| (x \neq 0)$ ，则 $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，

当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 \ln x$ ，则 $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$ ，

令 $f'(x) < 0$ ，得 $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ ；令 $f'(x) > 0$ ，得 $x > e^{-\frac{1}{2}}$ ；

故 $f(x)$ 在 $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $\left(-e^{-\frac{1}{2}}, 0\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\infty, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，



显然，此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值，故 D 错误。

故选：ABC.

12. 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有（ ）

- A. 直径为 0.99m 的球体
- B. 所有棱长均为 1.4m 的四面体
- C. 底面直径为 0.01m，高为 1.8m 的圆柱体
- D. 底面直径为 1.2m，高为 0.01m 的圆柱体

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题意结合正方体的性质逐项分析判断。

【详解】对于选项 A：因为 $0.99\text{m} < 1\text{m}$ ，即球体的直径小于正方体的棱长，所以能够被整体放入正方体内，故 A 正确；

对于选项 B：因为正方体的面对角线长为 $\sqrt{2}\text{m}$ ，且 $\sqrt{2} > 1.4$ ，所以能够被整体放入正方体内，故 B 正确；

对于选项 C：因为正方体的体对角线长为 $\sqrt{3}\text{m}$ ，且 $\sqrt{3} < 1.8$ ，所以不能够被整体放入正方体内，故 C 正确；

对于选项 D：因为正方体的体对角线长为 $\sqrt{3}\text{m}$ ，且 $\sqrt{3} > 1.2$ ，

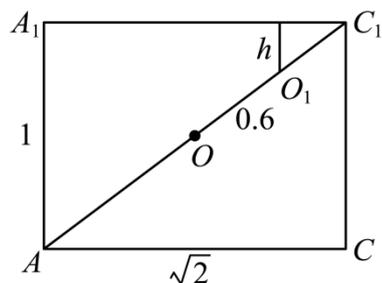
设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O ，以 AC_1 为轴对称放置圆柱，设圆柱的底面圆心 O_1 到正方体的表面的最近的距离为 hm ，

如图，结合对称性可知： $OC_1 = \frac{1}{2}C_1A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $C_1O_1 = OC_1 - OO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0.6$ ，

$$\text{则 } \frac{h}{AA_1} = \frac{C_1O_1}{C_1A}, \text{ 即 } \frac{h}{1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.6}{\sqrt{3}}, \text{ 解得 } h = \frac{1}{2} - \frac{0.6}{\sqrt{3}} > 0.34 > 0.01,$$

所以能够被整体放入正方体内，故 D 正确；

故选：ABD.



【点睛】关键点睛：对于 C、D：以正方体的体对角线为圆柱的轴，结合

正方体以及圆柱的性质分析判断.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有_____种（用数字作答）.

【答案】64

【解析】

【分析】分类讨论选修 2 门或 3 门课，对选修 3 门，再讨论具体选修课的分配，结合组合数运算求解.

【详解】（1）当从 8 门课中选修 2 门，则不同的选课方案共有 $C_4^1 C_4^1 = 16$ 种；

（2）当从 8 门课中选修 3 门，

①若体育类选修课 1 门，则不同的选课方案共有 $C_4^1 C_4^2 = 24$ 种；

②若体育类选修课 2 门，则不同的选课方案共有 $C_4^2 C_4^1 = 24$ 种；

综上所述：不同的选课方案共有 $16 + 24 + 24 = 64$ 种.

故答案为：64.

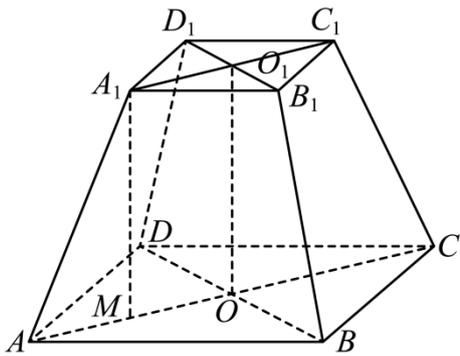
14. 在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 2, A_1B_1 = 1, AA_1 = \sqrt{2}$ ，则该棱台的体积为_____.

【答案】 $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ ## $\frac{7}{6}\sqrt{6}$

【解析】

【分析】结合图像，依次求得 A_1O_1, AO, A_1M ，从而利用棱台的体积公式即可得解.

【详解】如图，过 A_1 作 $A_1M \perp AC$ ，垂足为 M ，易知 A_1M 为四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的高，



因为 $AB = 2, A_1B_1 = 1, AA_1 = \sqrt{2}$,

则 $A_1O_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}A_1B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}AB = \sqrt{2}$,

故 $AM = \frac{1}{2}(AC - A_1C_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $A_1M = \sqrt{A_1A^2 - AM^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以所求体积为 $V = \frac{1}{3} \times (4 + 1 + \sqrt{4 \times 1}) \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

故答案为: $\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

15. 已知函数 $f(x) = \cos \omega x - 1 (\omega > 0)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是_____.

【答案】 [2,3)

【解析】

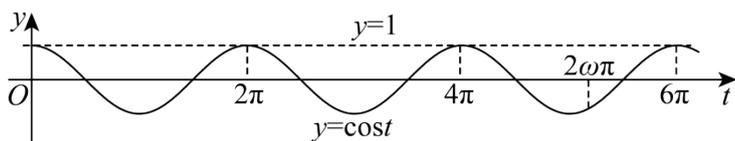
【分析】 令 $f(x) = 0$, 得 $\cos \omega x = 1$ 有 3 个根, 从而结合余弦函数的图像性质即可得解.

【详解】 因为 $0 \leq x \leq 2\pi$, 所以 $0 \leq \omega x \leq 2\omega\pi$,

令 $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0$, 则 $\cos \omega x = 1$ 有 3 个根,

令 $t = \omega x$, 则 $\cos t = 1$ 有 3 个根, 其中 $t \in [0, 2\omega\pi]$,

结合余弦函数 $y = \cos t$ 的图像性质可得 $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 故 $2 \leq \omega < 3$,



故答案为: [2,3).

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 A 在 C 上, 点 B 在 y 轴上,

$\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}, \overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 则 C 的离心率为_____.

【答案】 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ## $\frac{3}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】方法一：利用双曲线的定义与向量数积的几何意义得到 $|AF_2|, |BF_2|, |BF_1|, |AF_1|$ 关于 a, m 的表达式，从而利用勾股定理求得 $a = m$ ，进而利用余弦定理得到 a, c 的齐次方程，从而得解。

方法二：依题意设出各点坐标，从而由向量坐标运算求得 $x_0 = \frac{5}{3}c, y_0 = -\frac{2}{3}t, t^2 = 4c^2$ ，将点 A 代入双曲线 C 得到关于 a, b, c 的齐次方程，从而得解；

【详解】方法一：

依题意，设 $|AF_2| = 2m$ ，则 $|BF_2| = 3m = |BF_1|, |AF_1| = 2a + 2m$ ，

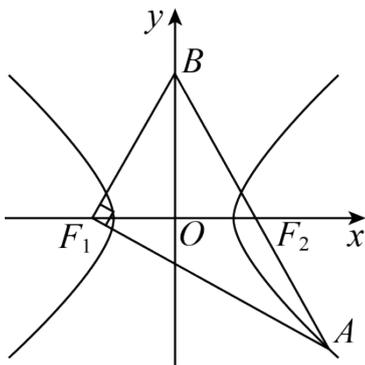
在 $\text{Rt}\triangle ABF_1$ 中， $9m^2 + (2a + 2m)^2 = 25m^2$ ，则 $(a + 3m)(a - m) = 0$ ，故 $a = m$ 或 $a = -3m$ （舍去），

所以 $|AF_1| = 4a, |AF_2| = 2a, |BF_2| = |BF_1| = 3a$ ，则 $|AB| = 5a$ ，

$$\text{故 } \cos \angle F_1AF_2 = \frac{|AF_1|}{|AB|} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5},$$

所以在 $\triangle AF_1F_2$ 中， $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{2 \times 4a \times 2a} = \frac{4}{5}$ ，整理得 $5c^2 = 9a^2$ ，

$$\text{故 } e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$



方法二：

依题意，得 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，令 $A(x_0, y_0), B(0, t)$ ，

因为 $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$ ，所以 $(x_0 - c, y_0) = -\frac{2}{3}(-c, t)$ ，则 $x_0 = \frac{5}{3}c, y_0 = -\frac{2}{3}t$ ，

又 $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$ ，所以 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = \left(\frac{8}{3}c, -\frac{2}{3}t\right) \cdot (c, t) = \frac{8}{3}c^2 - \frac{2}{3}t^2 = 0$ ，则 $t^2 = 4c^2$ ，

又点 A 在 C 上, 则 $\frac{25}{9}c^2 - \frac{4}{9}t^2 = 1$, 整理得 $\frac{25c^2}{9a^2} - \frac{4t^2}{9b^2} = 1$, 则 $\frac{25c^2}{9a^2} - \frac{16c^2}{9b^2} = 1$,

所以 $25c^2b^2 - 16c^2a^2 = 9a^2b^2$, 即 $25c^2(c^2 - a^2) - 16a^2c^2 = 9a^2(c^2 - a^2)$,

整理得 $25c^4 - 50c^2 + 9a^4 = 0$, 则 $(5c^2 - 9a^2)(5c^2 - a^2) = 0$, 解得 $5c^2 = 9a^2$ 或 $5c^2 = a^2$,

又 $e > 1$, 所以 $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (舍去), 故 $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】关键点睛: 双曲线过焦点的三角形的解决关键是充分利用双曲线的定义, 结合勾股定理与余弦定理得到关于 a, b, c 的齐次方程, 从而得解.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 3C, 2\sin(A - C) = \sin B$.

(1) 求 $\sin A$;

(2) 设 $AB = 5$, 求 AB 边上的高.

【答案】(1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) 6

【解析】

【分析】(1) 根据角的关系及两角和差正弦公式, 化简即可得解;

(2) 利用同角之间的三角函数基本关系及两角和的正弦公式求 $\sin B$, 再由正弦定理求出 b , 根据等面积法求解即可.

【小问 1 详解】

$$\because A + B = 3C,$$

$$\therefore \pi - C = 3C, \text{ 即 } C = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{又 } 2\sin(A - C) = \sin B = \sin(A + C),$$

$$\therefore 2\sin A \cos C - 2\cos A \sin C = \sin A \cos C + \cos A \sin C,$$

$$\therefore \sin A \cos C = 3\cos A \sin C,$$

$$\therefore \sin A = 3\cos A,$$

即 $\tan A = 3$, 所以 $0 < A < \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore \sin A = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

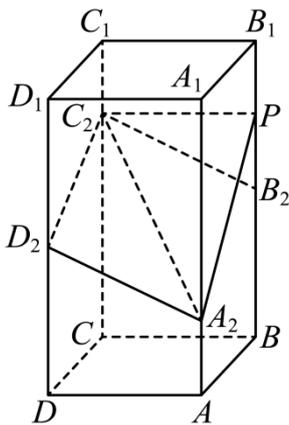
由 $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} \right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由正弦定理, $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $b = \frac{5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{10}$,

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A,$$

$$\therefore h = b \cdot \sin A = 2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 6.$$

18. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2, AA_1 = 4$. 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$.



(1) 证明: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;

(2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时, 求 B_2P .

【答案】(1) 证明见解析;

(2) 1

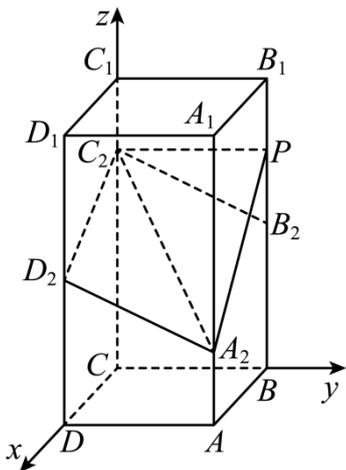
【解析】

【分析】(1) 建立空间直角坐标系，利用向量坐标相等证明；

(2) 设 $P(0, 2, \lambda)(0 \leq \lambda \leq 4)$ ，利用向量法求二面角，建立方程求出 λ 即可得解.

【小问 1 详解】

以 C 为坐标原点， CD, CB, CC_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，如图，



则 $C(0, 0, 0), C_2(0, 0, 3), B_2(0, 2, 2), D_2(2, 0, 2), A_2(2, 2, 1)$,

$$\therefore \overrightarrow{B_2C_2} = (0, -2, 1), \overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{B_2C_2} // \overrightarrow{A_2D_2},$$

又 B_2C_2, A_2D_2 不在同一条直线上，

$$\therefore B_2C_2 // A_2D_2.$$

【小问 2 详解】

设 $P(0, 2, \lambda)(0 \leq \lambda \leq 4)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2), \overrightarrow{PC_2} = (0, -2, 3 - \lambda), \overrightarrow{D_2C_2} = (-2, 0, 1),$$

设平面 PA_2C_2 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_2C_2} = -2x - 2y + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC_2} = -2y + (3 - \lambda)z = 0 \end{cases},$$

令 $z = 2$ ，得 $y = 3 - \lambda, x = \lambda - 1$,

$$\therefore \vec{n} = (\lambda - 1, 3 - \lambda, 2),$$

设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量 $\vec{m} = (a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_2C_2} = -2a - 2b + 2c = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{D_2C_2} = -2a + c = 0 \end{cases},$$

令 $a=1$, 得 $b=1, c=2$,

$$\therefore \vec{m} = (1, 1, 2),$$

$$\therefore \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \sqrt{4 + (\lambda - 1)^2 + (3 - \lambda)^2}} = |\cos 150^\circ| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

化简可得, $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$,

解得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$,

$\therefore P(0, 2, 1)$ 或 $P(0, 2, 3)$,

$\therefore B_2P = 1$.

19. 已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

【答案】 (1) 答案见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 先求导, 再分类讨论 $a \leq 0$ 与 $a > 0$ 两种情况, 结合导数与函数单调性的关系即可得解;

(2) 方法一: 结合 (1) 中结论, 将问题转化为 $a^2 - \frac{1}{2} - \ln a > 0$ 的恒成立问题, 构造函数 $g(a) = a^2 - \frac{1}{2} - \ln a (a > 0)$, 利用导数证得 $g(a) > 0$ 即可.

方法二: 构造函数 $h(x) = e^x - x - 1$, 证得 $e^x \geq x + 1$, 从而得到 $f(x) \geq x + \ln a + 1 + a^2 - x$, 进而将问题转化为 $a^2 - \frac{1}{2} - \ln a > 0$ 的恒成立问题, 由此得证.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) = a(e^x + a) - x$, 定义域为 \mathbf{R} , 所以 $f'(x) = ae^x - 1$,

当 $a \leq 0$ 时, 由于 $e^x > 0$, 则 $ae^x \leq 0$, 故 $f'(x) = ae^x - 1 < 0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = ae^x - 1 = 0$, 解得 $x = -\ln a$,

当 $x < -\ln a$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减;

当 $x > -\ln a$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增;

综上: 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

【小问 2 详解】

方法一:

由 (1) 得, $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = a(e^{-\ln a} + a) + \ln a = 1 + a^2 + \ln a$,

要证 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 即证 $1 + a^2 + \ln a > 2\ln a + \frac{3}{2}$, 即证 $a^2 - \frac{1}{2} - \ln a > 0$ 恒成立,

令 $g(a) = a^2 - \frac{1}{2} - \ln a (a > 0)$, 则 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$,

令 $g'(a) < 0$, 则 $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 令 $g'(a) > 0$, 则 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

所以 $g(a)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(a)_{\min} = g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{2} > 0$, 则 $g(a) > 0$ 恒成立,

所以当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ 恒成立, 证毕.

方法二:

令 $h(x) = e^x - x - 1$, 则 $h'(x) = e^x - 1$,

由于 $y = e^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $h'(x) = e^x - 1$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

又 $h'(0) = e^0 - 1 = 0$,

所以当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$;

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h(x) \geq h(0) = 0$, 则 $e^x \geq x + 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

因为 $f(x) = a(e^x + a) - x = ae^x + a^2 - x = e^{x+\ln a} + a^2 - x \geq x + \ln a + 1 + a^2 - x$,

当且仅当 $x + \ln a = 0$ ，即 $x = -\ln a$ 时，等号成立，

所以要证 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ ，即证 $x + \ln a + 1 + a^2 - x > 2\ln a + \frac{3}{2}$ ，即证 $a^2 - \frac{1}{2} - \ln a > 0$ ，

令 $g(a) = a^2 - \frac{1}{2} - \ln a (a > 0)$ ，则 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$ ，

令 $g'(a) < 0$ ，则 $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；令 $g'(a) > 0$ ，则 $a > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ；

所以 $g(a)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(a)_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{2} > 0$ ，则 $g(a) > 0$ 恒成立，

所以当 $a > 0$ 时， $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ 恒成立，证毕。

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，且 $d > 1$ 。令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$ ，记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和。

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $S_{99} - T_{99} = 99$ ，求 d 。

【答案】 (1) $a_n = 3n$

(2) $d = \frac{51}{50}$

【解析】

【分析】 (1) 根据等差数列的通项公式建立方程求解即可；

(2) 由 $\{b_n\}$ 为等差数列得出 $a_1 = d$ 或 $a_1 = 2d$ ，再由等差数列的性质可得 $a_{50} - b_{50} = 1$ ，分类讨论即可得解。

【小问 1 详解】

$$\because 3a_2 = 3a_1 + a_3, \therefore 3d = a_1 + 2d, \text{ 解得 } a_1 = d,$$

$$\therefore S_3 = 3a_2 = 3(a_1 + d) = 6d,$$

$$\text{又 } T_3 = b_1 + b_2 + b_3 = \frac{2}{d} + \frac{6}{2d} + \frac{12}{3d} = \frac{9}{d},$$

$$\therefore S_3 + T_3 = 6d + \frac{9}{d} = 21,$$

$$\text{即 } 2d^2 - 7d + 3 = 0, \text{ 解得 } d = 3 \text{ 或 } d = \frac{1}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 3n.$$

【小问 2 详解】

$\therefore \{b_n\}$ 为等差数列,

$$\therefore 2b_2 = b_1 + b_3, \text{ 即 } \frac{12}{a_2} = \frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3},$$

$$\therefore 6\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) = \frac{6d}{a_2 a_3} = \frac{1}{a_1}, \text{ 即 } a_1^2 - 3a_1 d + 2d^2 = 0, \text{ 解得 } a_1 = d \text{ 或 } a_1 = 2d,$$

$$\therefore d > 1, \therefore a_n > 0,$$

又 $S_{99} - T_{99} = 99$, 由等差数列性质知, $99a_{50} - 99b_{50} = 99$, 即 $a_{50} - b_{50} = 1$,

$$\therefore a_{50} - \frac{2550}{a_{50}} = 1, \text{ 即 } a_{50}^2 - a_{50} - 2550 = 0, \text{ 解得 } a_{50} = 51 \text{ 或 } a_{50} = -50 \text{ (舍去)}$$

当 $a_1 = 2d$ 时, $a_{50} = a_1 + 49d = 51d = 51$, 解得 $d = 1$, 与 $d > 1$ 矛盾, 无解;

$$\text{当 } a_1 = d \text{ 时, } a_{50} = a_1 + 49d = 50d = 51, \text{ 解得 } d = \frac{51}{50}.$$

$$\text{综上, } d = \frac{51}{50}.$$

21. 甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选, 第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i. \text{ 记前 } n \text{ 次 (即从第 1 次到第 } n \text{ 次投篮) 中甲投篮的次数为 } Y, \text{ 求 } E(Y).$$

【答案】(1) 0.6

$$(2) \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}$$

$$(3) E(Y) = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + \frac{n}{3}$$

【解析】

【分析】(1) 根据全概率公式即可求出;

(2) 设 $P(A_i) = p_i$, 由题意可得 $p_{i+1} = 0.4p_i + 0.2$, 根据数列知识, 构造等比数列即可解出;

(3) 先求出两点分布的期望, 再根据题中的结论以及等比数列的求和公式即可求出.

【小问 1 详解】

记“第 i 次投篮的人是甲”为事件 A_i , “第 i 次投篮的人是乙”为事件 B_i ,

$$\begin{aligned} \text{所以, } P(B_2) &= P(A_1B_2) + P(B_1B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(B_1)P(B_2|B_1) \\ &= 0.5 \times (1 - 0.6) + 0.5 \times 0.8 = 0.6. \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

设 $P(A_i) = p_i$, 依题可知, $P(B_i) = 1 - p_i$, 则

$$P(A_{i+1}) = P(A_iA_{i+1}) + P(B_iA_{i+1}) = P(A_i)P(A_{i+1}|A_i) + P(B_i)P(A_{i+1}|B_i),$$

$$\text{即 } p_{i+1} = 0.6p_i + (1 - 0.8) \times (1 - p_i) = 0.4p_i + 0.2,$$

构造等比数列 $\{p_i + \lambda\}$,

$$\text{设 } p_{i+1} + \lambda = \frac{2}{5}(p_i + \lambda), \text{ 解得 } \lambda = -\frac{1}{3}, \text{ 则 } p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}\left(p_i - \frac{1}{3}\right),$$

又 $p_1 = \frac{1}{2}, p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 所以 $\left\{p_i - \frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$, 公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比数列,

$$\text{即 } p_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}, p_i = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}.$$

【小问 3 详解】

$$\text{因为 } p_i = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1} + \frac{1}{3}, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{所以当 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 时, } E(Y) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{n}{3} = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right] + \frac{n}{3},$$

$$\text{故 } E(Y) = \frac{5}{18} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right] + \frac{n}{3}.$$

【点睛】本题第一问直接考查全概率公式的应用, 后两问的解题关键是根据题意找到递推式, 然后根据数列的基本知识求解.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

【答案】 (1) $y = x^2 + \frac{1}{4}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 设 $P(x, y)$, 根据题意列出方程 $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = y^2$, 化简即可;

(2) 法一: 设矩形的三个顶点 $A\left(a, a^2 + \frac{1}{4}\right), B\left(b, b^2 + \frac{1}{4}\right), C\left(c, c^2 + \frac{1}{4}\right)$, 且 $a < b < c$, 分别令

$k_{AB} = a + b = m < 0, k_{BC} = b + c = n > 0$, 且 $mn = -1$, 利用放缩法得 $\frac{1}{2}C \geq \left(n + \frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}$, 设函数

$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 (1+x^2)$, 利用导数求出其最小值, 则得 C 的最小值, 再排除边界值即可.

法二: 设直线 AB 的方程为 $y = k(x-a) + a^2 + \frac{1}{4}$, 将其与抛物线方程联立, 再利用弦长公式和放缩法得

$|AB| + |AD| \geq \sqrt{\frac{(1+k^2)^3}{k^2}}$, 利用换元法和求导即可求出周长最值, 再排除边界值即可.

法三: 利用平移坐标系法, 再设点, 利用三角换元再对角度分类讨论, 结合基本不等式即可证明.

【小问 1 详解】

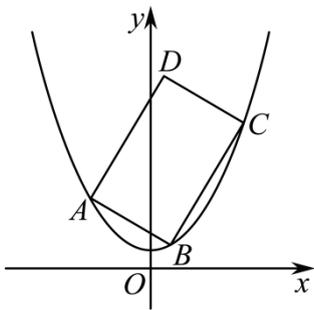
设 $P(x, y)$, 则 $|y| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}$, 两边同平方化简得 $y = x^2 + \frac{1}{4}$,

故 $W: y = x^2 + \frac{1}{4}$.

【小问 2 详解】

法一: 设矩形的三个顶点 $A\left(a, a^2 + \frac{1}{4}\right), B\left(b, b^2 + \frac{1}{4}\right), C\left(c, c^2 + \frac{1}{4}\right)$ 在 W 上, 且 $a < b < c$, 易知矩形四条边

所在直线的斜率均存在, 且不为 0,



则 $k_{AB} \cdot k_{BC} = -1, a+b < b+c$, 令 $k_{AB} = \frac{b^2 + \frac{1}{4} - (a^2 + \frac{1}{4})}{b-a} = a+b = m < 0$,

同理令 $k_{BC} = b+c = n > 0$, 且 $mn = -1$, 则 $m = -\frac{1}{n}$,

设矩形周长为 C , 由对称性不妨设 $|m| \geq |n|$, $k_{BC} - k_{AB} = c-a = n-m = n + \frac{1}{n}$,

则 $\frac{1}{2}C = |AB| + |BC| = (b-a)\sqrt{1+m^2} + (c-b)\sqrt{1+n^2} \geq (c-a)\sqrt{1+n^2} = \left(n + \frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2} \cdot n > 0$, 易知

$$\left(n + \frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2} > 0$$

则令 $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 (1+x^2), x > 0, f'(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \left(2x - \frac{1}{x}\right)$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

当 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 单调递增,

则 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{27}{4}$,

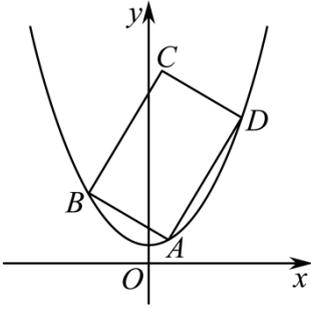
故 $\frac{1}{2}C \geq \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 即 $C \geq 3\sqrt{3}$.

当 $C = 3\sqrt{3}$ 时, $n = \frac{\sqrt{2}}{2}, m = -\sqrt{2}$, 且 $(b-a)\sqrt{1+m^2} = (b-a)\sqrt{1+n^2}$, 即 $m = n$ 时等号成立, 矛盾, 故

$$C > 3\sqrt{3},$$

得证.

法二：不妨设 A, B, D 在 W 上，且 $BA \perp DA$ ，



依题意可设 $A\left(a, a^2 + \frac{1}{4}\right)$ ，易知直线 BA ， DA 的斜率均存在且不为 0，

则设 BA, DA 的斜率分别为 k 和 $-\frac{1}{k}$ ，由对称性，不妨设 $|k| \leq 1$ ，

直线 AB 的方程为 $y = k(x - a) + a^2 + \frac{1}{4}$ ，

$$\text{则联立} \begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{4} \\ y = k(x - a) + a^2 + \frac{1}{4} \end{cases} \text{得 } x^2 - kx + ka - a^2 = 0,$$

$$\Delta = k^2 - 4(ka - a^2) = (k - 2a)^2 > 0, \text{ 则 } k \neq 2a$$

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1 + k^2} |k - 2a|,$$

$$\text{同理 } |AD| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \left| \frac{1}{k} + 2a \right|,$$

$$\begin{aligned} \therefore |AB| + |AD| &= \sqrt{1 + k^2} |k - 2a| + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \left| \frac{1}{k} + 2a \right| \\ &\geq \sqrt{1 + k^2} \left(|k - 2a| + \left| \frac{1}{k} + 2a \right| \right) \geq \sqrt{1 + k^2} \left| k + \frac{1}{k} \right| = \sqrt{\frac{(1 + k^2)^3}{k^2}} \end{aligned}$$

$$\text{令 } k^2 = m, \text{ 则 } m \in (0, 1], \text{ 设 } f(m) = \frac{(m + 1)^3}{m} = m^2 + 3m + \frac{1}{m} + 3,$$

$$\text{则 } f'(m) = 2m + 3 - \frac{1}{m^2} = \frac{(2m - 1)(m + 1)^2}{m^2}, \text{ 令 } f'(m) = 0, \text{ 解得 } m = \frac{1}{2},$$

当 $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时， $f'(m) < 0$ ，此时 $f(m)$ 单调递减，

当 $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ， $f'(m) > 0$ ，此时 $f(m)$ 单调递增，

$$\text{则 } f(m)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4},$$

$$\therefore |AB| + |AD| \geq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

但 $\sqrt{1+k^2} |k-2a| + \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left|\frac{1}{k} + 2a\right| \geq \sqrt{1+k^2} \left(|k-2a| + \left|\frac{1}{k} + 2a\right|\right)$, 此处取等条件为 $k=1$, 与最终取等

时 $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 不一致, 故 $|AB| + |AD| > \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

法三: 为了计算方便, 我们将抛物线向下移动 $\frac{1}{4}$ 个单位得抛物线 $W': y = x^2$,

矩形 $ABCD$ 变换为矩形 $A'B'C'D'$, 则问题等价于矩形 $A'B'C'D'$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

设 $B'(t_0, t_0^2), A'(t_1, t_1^2), C'(t_2, t_2^2)$, 根据对称性不妨设 $t_0 \geq 0$.

则 $k_{A'B'} = t_1 + t_0, k_{B'C'} = t_2 + t_0$, 由于 $A'B' \perp B'C'$, 则 $(t_1 + t_0)(t_2 + t_0) = -1$.

由于 $|A'B'| = \sqrt{1+(t_1+t_0)^2} |t_1 - t_0|, |B'C'| = \sqrt{1+(t_2+t_0)^2} |t_2 - t_0|$, 且 t_0 介于 t_1, t_2 之间,

则 $|A'B'| + |B'C'| = \sqrt{1+(t_1+t_0)^2} |t_1 - t_0| + \sqrt{1+(t_2+t_0)^2} |t_2 - t_0|$. 令 $t_2 + t_0 = \tan \theta$,

$t_1 + t_0 = -\cot \theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $t_2 = \tan \theta - t_0, t_1 = -\cot \theta - t_0$, 从而

$$|A'B'| + |B'C'| = \sqrt{1+\cot^2 \theta} (2t_0 + \cot \theta) + \sqrt{1+\tan^2 \theta} (\tan \theta - 2t_0)$$

$$\text{故 } |A'B'| + |B'C'| = 2t_0 \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} \right) + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2t_0(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

① 当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时,

$$|A'B'| + |B'C'| \geq \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}} = 2\sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}} \geq 2\sqrt{2}$$

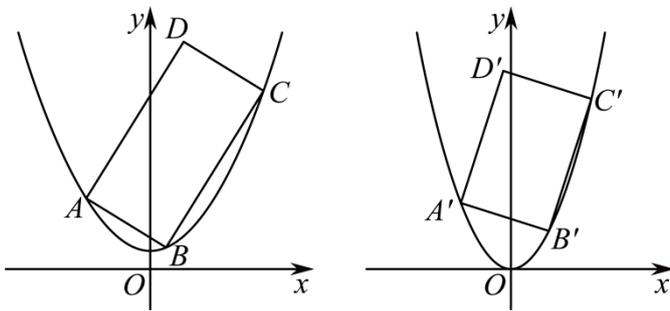
② 当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 由于 $t_1 < t_0 < t_2$, 从而 $-\cot \theta - t_0 < t_0 < \tan \theta - t_0$,

从而 $-\frac{\cot \theta}{2} < t_0 < \frac{\tan \theta}{2}$ 又 $t_0 \geq 0$,

$$\text{故 } 0 \leq t_0 < \frac{\tan \theta}{2}, \text{ 由此 } |A'B'| + |B'C'| = \frac{2t_0(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{\sin \theta(\cos \theta - \sin \theta)(\sin \theta \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^3 \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\sin^2 \theta \sin^2 \theta \cdot 2 \cos^2 \theta}} = \sqrt{\frac{2}{(1 - \cos^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta) \cdot 2 \cos^2 \theta}} \\
&\geq \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{(1 - \cos^2 \theta) + (1 - \cos^2 \theta) + 2 \cos^2 \theta}{3}\right)^3}} \geq \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2},
\end{aligned}$$

当且仅当 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，故 $|A'B'| + |B'C'| > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，故矩形周长大于 $3\sqrt{2}$ 。



【点睛】 关键点睛：本题的第二个的关键是通过放缩得 $\frac{1}{2}C = |AB| + |BC| \geq \left(n + \frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}$ ，同时为了简

便运算，对右边的式子平方后再设新函数求导，最后再排除边界值即可。

