绝密☆启用前　试卷类型：A

2022年普通高等学校招生全国统一考试

数学

本试卷共4页，22小题，满分150分.考试用时120分钟.

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4．考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x\,|\,\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x\,|\,3x\ge 1\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\left\{x\middle|0\le x<2\right\}$　　B. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\le x<2\right\}$　　C. $\left\{x\middle|3\le x<16\right\}$　　D. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\le x<16\right\}$

2. 若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\overline{z}=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$．记 $\overrightarrow{CA}=\vec{m},\overrightarrow{CD}=\vec{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$（　　）

A. $3\vec{m}-2\vec{n}$　　B. $-2\vec{m}+3\vec{n}$　　C. $3\vec{m}+2\vec{n}$　　D. $2\vec{m}+3\vec{n}$

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔 $148.5\mathrm{m}$ 时，相应水面的面积为 $140.0\mathrm{km}^2$；水位为海拔 $157.5\mathrm{m}$ 时，相应水面的面积为 $180.0\mathrm{km}^2$，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 $148.5\mathrm{m}$ 上升到 $157.5\mathrm{m}$ 时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（　　）

A. $1.0\times10^9\mathrm{m}^3$　　B. $1.2\times10^9\mathrm{m}^3$　　C. $1.4\times10^9\mathrm{m}^3$　　D. $1.6\times10^9\mathrm{m}^3$

5. 从2至8的7个整数中随机取2个不同的数，则这2个数互质的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T. 若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

7. 设 $a=0.1\mathrm{e}^{0.1},b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　）

A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$　　B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$　　D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

10. 已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则（　　）

A. $f(x)$ 有两个极值点　　B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心　　D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P，Q 两点，则（　　）

A. C 的准线为 $y=-1$　　B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　　D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

12. 已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，记$g(x)=f'(x)$，若$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，则（　　）

A. $f(0)=0$　　B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　C. $f(-1)=f(4)$　　D. $g(-1)=g(2)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中$x^2y^6$的系数为____________（用数字作答）．

14. 写出与圆$x^2+y^2=1$和$(x-3)^2+(y-4)^2=16$都相切的一条直线的方程____________．

15. 若曲线$y=(x+a)\mathrm{e}^x$有两条过坐标原点的切线，则a的取值范围是____________．

16. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$的上顶点为$A$，两个焦点为$F_1$，$F_2$，离心率为$\frac{1}{2}$．过$F_1$且垂直于$AF_2$的直线与$C$交于$D$，$E$两点，$|DE|=6$，则$\triangle ADE$的周长是____________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1,\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

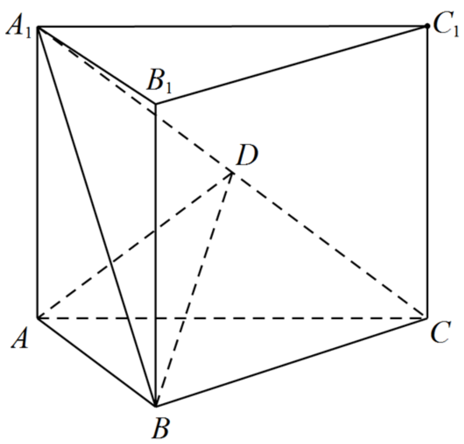
（2）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$．

18. 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$．

（1）若$C=\frac{2\pi}{3}$，求B；

（2）求$\frac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值．

19. 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为 4，$\triangle A_1BC$的面积为$2\sqrt{2}$．



（1）求 A 到平面 A_1BC 的距离；

（2）设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1 = AB$，平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值．

20．一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

（1）能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2）从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”．$\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}$ 与 $\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R．

（i）证明：$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$；

（ii）利用该调查数据，给出 $P(A|B), P(A|\overline{B})$ 的估计值，并利用（i）的结果给出 R 的估计值．

附 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P\left(K^2 \geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21. 已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$ 上，直线 l 交 C 于 P，Q 两点，直线 AP,AQ 的斜率之和为 0.

（1）求 l 的斜率；

（2）若 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求 $\triangle PAQ$ 的面积.

22. 已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

（1）求 a；

（2）证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.