2024年普通高等学校招生全国统一考试（新课标II卷）

数学

本试卷共10页，19小题，满分150分.

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2.选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3.填空题和解答题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

4.考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知$z=-1-\mathrm{i}$，则$|z|=$（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 已知命题p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$；命题q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则（　　）

A. p和q都是真命题　　B. $\neg p$和q都是真命题

C. p和$\neg q$都是真命题　　D. $\neg p$和$\neg q$都是真命题

3. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{a}+2\vec{b}|=2$，且$(\vec{b}-2\vec{a})\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

4. 某农业研究部门在面积相等的100块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并部分整理下表

亩产量	[900，950）	[950，1000）	[1000，1050）	[1100，1150）	[1150，1200）
频数	6	12	18	24	10

据表中数据，结论中正确的是（　　）

A. 100块稻田亩产量的中位数小于1050kg

B. 100 块稻田中亩产量低于 1100kg 的稻田所占比例超过 80%

C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200kg 至 300kg 之间

D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900kg 至 1000kg 之间

5. 已知曲线 C：$x^2+y^2=16$（$y>0$），从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP'，P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$（$y>0$）　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$（$y>0$）

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$（$y>0$）　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1$（$y>0$）

6. 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$，当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，则 $a=$（　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

7. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$，$AB=6$，$A_1B_1=2$，则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geq 0$，则 a^2+b^2 的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，下列正确的有（　　）

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同零点　　B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同最大值

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期　　D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有相同的对称轴

10. 抛物线 C：$y^2=4x$ 的准线为 l，P 为 C 上的动点，过 P 作 $\odot A: x^2+(y-4)^2=1$ 的一条切线，Q 为切点，过 P 作 l 的垂线，垂足为 B，则（　　）

A. l 与 $\odot A$ 相切

B. 当 P，A，B 三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C. 当 $|PB|=2$ 时，$PA\perp AB$

D. 满足$|PA|=|PB|$的点P有且仅有 2 个

11. 设函数$f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则（　　）

A. 当$a>1$时，$f(x)$有三个零点

B. 当$a<0$时，$x=0$是$f(x)$的极大值点

C. 存在a，b，使得$x=b$为曲线$y=f(x)$的对称轴

D. 存在a，使得点$\left(1,f\left(1\right)\right)$为曲线$y=f(x)$的对称中心

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则$S_{10}=$________.

13. 已知α为第一象限角，β为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则$\sin(\alpha+\beta)=$

________.

14. 在如图的 4×4 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有________种选法，在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是________.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

（1）求A.

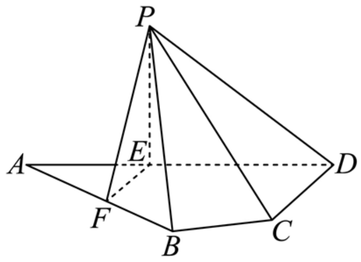
（2）若$a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求$\triangle ABC$的周长.

16. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$.

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f(x)$在点$\left(1,f(1)\right)$处的切线方程；

（2）若$f(x)$有极小值，且极小值小于 0，求a的取值范围.

17. 如图，平面四边形$ABCD$中，$AB=8$，$CD=3$，$AD=5\sqrt{3}$，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle BAD=30^\circ$，点E，F满足$\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将$\triangle AEF$沿$EF$对折至！$PEF$，使得$PC=4\sqrt{3}$.



（1）证明：$EF \perp PD$；

（2）求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值．

18. 某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成员为 0 分；若至少投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分. 该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和．某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p，乙每次投中的概率为 q，各次投中与否相互独立.

（1）若 $p=0.4$，$q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率.

（2）假设 $0<p<q$，

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

（ii）为使得甲、乙，所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

19. 已知双曲线 $C: x^2-y^2=m\left(m>0\right)$，点 $P_1\left(5,4\right)$ 在 C 上，k 为常数，$0<k<1$．按照如下方式依次构造点 $P_n\left(n=2,3,...\right)$，过 P_{n-1} 作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 $\left(x_n, y_n\right)$.

（1）若 $k=\dfrac{1}{2}$，求 x_2, y_2；

（2）证明：数列 $\left\{x_n-y_n\right\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

（3）设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 n，$S_n=S_{n+1}$.